

通俗数学名著译丛

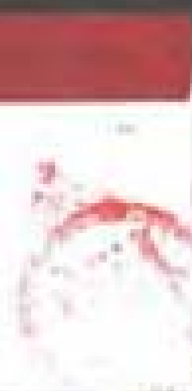
ERSHISHIJI SHUXUE DE

WUDA ZHIDAO LILUN

〔美〕约翰·L·卡斯蒂 著

叶其孝 刘宝光 译

上海教育出版社



20世纪数学的五大指导理论

20世纪数学的
五大指导理论

——以及它们为什么至关重要

[美]约翰·L·卡斯蒂著 叶其孝 刘宝光译 · 上海教育出版社



John L. Casti

Five Golden Rules

Great Theories of 20th-Century Mathematics

—and Why They Matter

John Wiley & Sons, Inc.

图书在版编目（C I P）数据

20世纪数学的五大指导理论：以及它们为什么至关重要／（美）卡斯蒂著；叶其孝，刘宝光译．—上海：上海教育出版社，2000.11

（通俗数学名著译丛／史树中，李文林主编）

ISBN 7-5320-7092-1

Ⅰ.2... Ⅱ.①卡...②叶...③刘... Ⅲ.数学理论-普及读物 Ⅳ.01-0

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第42469号

通俗数学名著译丛

20世纪数学的五大指导理论

——以及它们为什么至关重要

［美］幼翰·L·卡斯蒂 著

叶其孝 刘宝光 译

上海世纪出版集团
上海教育出版社 出版发行

（上海永福路123号 邮政编码：200031）

各地新华书店经销 上海江扬印刷厂印刷

开本850×1156 1/32 印张8.25 插页4 字数192,000

2000年12月第1版 2000年12月第1次印刷

印数1—7,100本

ISBN 7-5320-7092-1/G·7248 定价：（软精）16.40元

迎接2000数学年

陳省身 1997

译丛序言

数学,这门古老而又常新的科学,正阔步迈向21世纪.

回顾即将过去的世纪,数学科学的巨大发展,比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位.数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透,并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献.同时,数学作为一种文化,已成为人类文明进步的标志.因此,对于当今社会每一个有文化的人士而言,不论他从事何种职业,都需要学习数学,了解数学和运用数学.现代社会对数学的这种需要,在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面,20世纪数学思想的深刻变革,已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路.面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法,门外汉往往只好望而却步.这样,提高数学的可接受度,就成为一种当务之急.尤其是当世纪转折之际,世界各国都十分重视并大力加强数学的普及工作,国际数学联盟(IMU)还专门将2000年定为**“世界数学年”**,其主要宗旨就是“使数学及其对世界的意义被社会所了解,特别是被普通公众所了解”.

一般说来,一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础.随着中国现代数学研究与教育的长足进步,数学普及工作在我国也受到重视.早在60年代,华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读

FRQ/!P

物，激发了一代青少年学习数学的兴趣，影响绵延至今．改革开放以来，我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力．但总体来说，我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距．我国数学要在下世纪初率先赶超世界先进水平，数学普及与传播方面的赶超乃是一个重要的环节和迫切的任务．为此，借鉴外国的先进经验是必不可少的．

《通俗数学名著译丛》的编辑出版，正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物，推动国内的数学普及与传播工作，为我国数学赶超世界先进水平的跨世纪工程贡献力量．丛书的选题计划，是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的．所选著述，基本上都是在国外已广为流传、受到公众好评的佳作．它们在内容上包括了不同的种类，有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用；有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧；有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系；……等等，试图为人们提供全新的观察视角，以窥探现代数学的发展概貌，领略数学文化的丰富多采．

丛书的读者对象，力求定位于尽可能广泛的范围．为此丛书中适当纳入了不同层次的作品，以使包括大、中学生；大、中学教师；研究生；一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益．即使是对于专业数学工作者，本丛书的部分作品也是值得一读的．现代数学是一株分支众多的大树，一个数学家对于他所研究的专业以外的领域，也往往深有隔行如隔山之感，也需要涉猎其他分支的进展，了解数学不同分支的联系．

需要指出的是，由于种种原因，近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气，有关选题逐年减少，品种数量不断下降．在这样的情况下，上海教育出版社以迎接 2000 世界数学年为契机，按照国际版权公约，不惜耗资购买版权，组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》，这无疑是值得称道和支持的举措．参加本丛书翻译的专家学者们，自愿抽出宝贵的时间来进行这类

通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作，同样也是值得肯定与提倡的.

像这样集中地翻译、引进数学科普读物，在国内还不多见.我们热切希望广大数学工作者和科普工作者来关心、扶植这项工作，使《通俗数学名著译丛》出版成功.

让我们举手迎接2000世界数学年，让公众了解、喜爱数学，让数学走进千家万户！

《通俗数学名著译丛》编委会

1997年8月

序 言

支撑任何需要智力努力的领域的生命线是不断地有稳定数量的重要、未解决(但原则上是能解决的)的问题的注入.例如,射影几何一度是数学中一个繁荣而富有成果的领域,但如今就像渡渡鸟①那样灭绝了,理由很简单:一百多年前问题的泉源就已枯竭了.另一方面,对当今风行一时的混沌未说,直到洛伦兹(Lorenz),斯梅尔(Smale),费根鲍姆(Feigenbaum),约克(Yorke),梅(May),吕斯勒(Rössler)和其他人晚近的工作鼓舞着当今混沌学家、他们的学生、追随者所倾泻出的大量的问题之前,除了少数几个数学上很神秘、有远见的冒险家和行家外,大家对混沌一无所知.这些例子清楚地说明了乔治·波利亚(George Pólya)的众所周知的名言:"数学就是问题解决的艺术."然而和其他专业的科学家不同的是,数学家有一个专门名词未表达他们对某个问题的解决——那就是定理.

数学就是关于定理的学问:怎样发现定理;怎样证明定理;怎样推广定理;怎样运用定理;怎样理解定理.《五大指导理论》企图通过展示本世纪数学家的艺术的五个最精致的成就来告诉一般的读者有关数学的知识.本书总的计划是考察数学中已经解决的几个最大的问题,这些问题是怎样解决的,最重要的是为什么其解决是至关重要的——不仅仅对数学家是至关重要的.

① 译注:鸽形目,孤鸽科鸟类,原产毛里求斯,1681年已经灭绝.

因此,《五大指导理论》的目标是通过例子启发、娱乐和教育而不[ix]是通过教条来达到上述目的.

S·乌拉姆(Stanislaw Ulam)一度估计过每年数学家要发表20多万条定理.这些定理的绝大部分无人问津,只有极小部分定理为相当数量的数学家所理解和信服.鉴于数学在我们这个星球上已经有了几个世纪的实践这一事实,要从即使是本世纪①发表的迄今已有数百万条的定理中挑出一些"最伟大"的定理,初一看这似乎是前景渺茫的,但是只要加上不多几个条件,或"过滤器",这项工作马上就大大减少,从而能把伟大的定理从冒充伟大的定理中分离出来.就本书中强调的五个受人珍视的数学珍宝而言,以下就是我采用的准则:

- **意义重大**:该定理是否突破了数学发展中的一个重大的僵局或障碍?或者该定理是否导致数学研究中新领域的确定?例子:莫尔斯(Morse)定理,它激发了奇性理论的发展.
- **优美性及其影响所及的范围**:该定理是否像一首诗或像一幅图画是优美的同样意义下具有内在的"优美性"?该定理是否紧凑地综述了大量的知识?该定理是否使人进一步了解数学内部相当多领域中的各种问题?例子:布劳威尔(Brouwer)不动点定理,该定理使我们能对各种框架下在很一般的数学条件下证明方程解的存在性.
- **应用**:该定理是否找到了数学之外的重要应用?该定理是否确保存在的数学结构为更全面地了解自然和(或)人类世界提供了基础?例子:极小极大定理,它为经济学及其他领域中关于决策者的行动是"合理的"的意义是什么这样一些问题的许多数学研究工作奠定了基石.
- **证明方法**:定理的证明是否需要利用新的逻辑技巧或推

① 译注:指20世纪.

理模式？能否使用这些方法使其他重要问题取得进展？例子：停机定理，其证明集中注意力于利用算法的思想来建立数学真理的想法.

● **哲学含意**：该定理是否告诉我们以前不知道的关于人类的某些重要事情？该定理的结论是否加上了重要的限制，或者反过来讲，是否为我们就我们可能知道的关于宇宙以及我们自己的更深刻的洞察开创新的机遇？例子：哥德尔(Gödel)的不完全性定理，该定理就人类阐明现实世界真理的能力加上了限制.

[x]

为有资格进入我们这种荣誉的名单，一条定理必须就这些范畴的大多数，即使不是全部的话，取得高分.无须太多想象就能看出，利用这些过滤器很快就可以把乌拉姆估计的数百万条定理削减到可以操作的规模.

但是伟大的定理不是孤立存在的；他们导致重大的理论.如前面指出过的，一条定理的意义的重要部分就在于或是在创造这些理论或是以某种方式养育、繁荣这些理论中作出的贡献.为此，我们这里注目的至少要像对待 20 世纪伟大的**理论**一样地对待伟大的定理自身.

浏览一下本书目录后读者可能会问，为什么本书中所考虑的定理都这么古老？五大指导理论中最新的是单纯形方法，这也要追溯到 1947 年，而最早的布劳威尔不动点定理发表于 1910 年.如果这是我们追求的现代数学，即 20 世纪的数学，为什么 20 世纪后半世纪的研究工作一点没有呢？当考虑到通常的舆论认为本世纪后半个世纪中做出的有意义的数学研究工作要比前几个世纪的数学研究的总和还要多时，这就更加令人费解了.

这是一个相当合情合理的问题，所以值得给予一个仔细考虑过的回答.回答基本上在于以下的事实，即我们实际上追求的是伟大的**理论**，而不是伟大的**定理**.而数学中伟大的理论就像伟大的诗篇、伟大的绘画或伟大的文学一样，需要时间使之成熟以

及被人确认为是“伟大的”.这使我回想起当英国首相参观法拉第[①]的实验室时法拉第的一个旁注.当法拉第叙述他在电学中的最新发现时,这位尊敬的绅士问道:“这有什么好呢?”法拉第回答说:“新生婴儿有什么好的,你必须等他(她)发育成长.”对于伟大的定理,情况也是这样.一般说一条伟大的定理至少要有[xi] 一代或两代人的时间才能“发育成长”,即被人们确认为是随后生长出来的一种伟大理论的种子.所以,我们所看到的当今的伟大理论几乎可以肯定其源起的日子是在二次大战前的时期.我也毫不怀疑从现在起十年后写的一本与本书类似的书中将注目于60或70年代的定理,他们现在正处在形成更伟大的理论的开始阶段.我还要指出有时候一种伟大理论的产生还需要技术的进步.例如,我十分怀疑如果没有过去几十年里发生的计算技术的重大进展,本书中论及的两个伟大的理论——最优化理论和计算的理论——会出现在像本书那样的任何一本著作中.

当我第一次想到有关本书的想法时,我就关于报告20世纪最伟大的定理和理论的一本书中应包括什么的问题询问了许多朋友和数学家他们会怎么做.某一天我想发表他们的一系列意见,可惜的是有点太长了,发表在这里不太自如.但是当我做出最后选择时,有人就问我为什么本书是如此的“不纯粹(数学)”;为什么所有的理论(除与拓扑学有关的可能是例外)都是某些人委婉地(或贬意地!)称之为“应用数学”(顺便说一句,我回避这个术语)的领域.为什么丝毫没有称之为“纯粹”数学的东西?有两方面理由:(a)我们都是由我们的口味和背景所控制制约的人,数学上,我的专业偏向于应用的方向,还有(b)我希望本书集中注意于为什么普通人(即,非学术界人士)应该关心作为他们

① 译注:Michael Faraday,1791.9.22～1867.8.25,英国物理学家、化学家和物理化学家.发现电磁感应现象、电解定律和光与磁的基本关系,创立现代电磁场的基本观念.出身于铁工家庭.

日常生活中一种因素的数学，这样一个目标再次把材料偏向于应用方面．我肯定期望其倾向与我不同的人写一本类似的书，该书可能是讨论诸如阿蒂雅—辛格(Atiyah-Singer)指标定理(偏微分方程)，有限单群分类定理(群论)以及哈恩—巴拿赫(Hahn-Banach)定理(泛函分析)等伟大的现代结果(和理论)．但我不认为我会是写这样一本书的作者．

因为我声称本书是为那些希望了解数学以及数学为什么至关重要的人写的，我至少是在含蓄地讲这是一本为非数学家写的书．这一事实就需要某种“解构”(deconstruction)．让我一开始就来说一下，就我的个人之见，完全不用数学来写一本有关数学的书是一种回避现实的手法，即有损于有才智的读者也给数学本身帮了倒忙．写一本这样的关于数学的“儿童交谈”的书，需要 [xii] 或者只讨论像几何和分形分析那样的画图的题目，或讨论常常是不失趣味性的包含数的性质，简单概率论或初等逻辑的智力游戏——实际的数学的细节在其内容中发挥作用．所以我选择了一条不同的、不那么具有报刊特点而且也是更为危险的路线．本书采用的路线是爱因斯坦很久以前口述的，当时他说道：“一种理论应该尽可能简单，但是不能更简单了．”所以允许我试着把这个有点令人困惑的注记翻译成针对本书读者的一种陈述．

就本书提供的材料而言，读者要有一点我喜欢称之为精致的数学基础．这并不意味着读者实际上懂得任何数学技巧或方法，本书中很少要用到技术数学的方法(实际上，没有)，但是要用到许多数学的概念、思想和多步推理．此外，我并不相信由S·W·霍金[1]的著作编辑很好记述下来的以下说法，即一本书中

[1] 译注：Stephen W. Hawking, 1942.1.8～，英国理论物理学家．他有关爆炸黑洞的发现有助于把相对论和量子力学联系起来．他患有严重的肌萎缩性脊髓侧索硬化症，行动困难，而竟能在物理上作出突出贡献，因此倍受尊重．1974年当选为皇家学会最年轻的会员．

的每个方程将使其销售量减半.我的理想的读者大概也不会相信这种说法.零星的方程以及偶尔有一个希腊字符甚至一、二个图也会间或地出现在书中.但是关心数学家达到的成就以及为什么这些成就是重要的读者丝毫不会被这种做法所吓倒.他或她将把这些小小的障碍猛踢到旁边去,就好像这些障碍比恼人的蚊子麻烦不了多少.所以本书是为任何不惧怕面对实际数学思想——迎面而上的人的.差不多任何一个学过高中代数或几何而且至少还对数学思想保留一点热情的人就属于这一范畴——即使很早前学过的课程细节已从记忆中消失也没有关系.要关心的正是这些思想和正视这些思想的愿望,而不是技术细节.

那么对具有相当数学基础的读者又怎样呢?如果对本书的草稿的各种建议可以作为判断的依据的话,那么即使是许多专业的数学家也将从本书中找到他们感兴趣的材料.当然他们找不到人们期望从数学教科书或研究专著中才有的严格而详细的证明.本书不是为"想要成为"数学家的人用的教科书(虽然本书曾作为文学院"为诗人用的数学"类型的大学生课程的教材用得很好).本书肯定不是一本专著.本书纯粹是阐明性的.对于本书中只有广泛概要的内容想要作深入细节了解的读者来说,我对每个主题穿插安排了具有各种数学难度又有更多细节的文献目录.

[xiii]

对于诸如本书那样的要把许多资料集中起来的工作来说,来自各方的信息及鼓励始终是非常宝贵的.所以还是让我履行参与写作任何一本书的各项工作中最令人高兴的事,即,向把他们的宝贵时间慷慨奉献给本书的朋友们和同事们表示我的敬意,以此来结束这已经是过长的序言吧.I·斯图尔特(Ian Stewart),P·戴维斯(Phil Davis),D·沙瑞(Don Saari),M·舒比克(Martin Shubik),A·杰克逊(Atlee Jackson)和G·柴丁(Greg Chaitin)对本书的内容和风格都提供了想法和博学的忠告.基于

同样的理由,我想对我过去的老师、朋友和现在的同事T·基纳(Tom Kyner)单独表示我特别的敬意.他仔细阅读了原始手稿的每一行并提出了建议,使得最后的定稿得以改进,并把我从几个十足的技术失着及其他无知和不恰当处解救出来.对于TEX排版顾问,要感谢M·伏利斯(Michael Vulis)和B·洪(Berthold Horn).在本书设计中,专业图书中心(Professional Book Center)的J·博伦丁(Jennifer Ballentine)提出了很好的想法及建议.

最后,我要赞扬本书的编辑E·鲁斯(Emily Loose),她一直是鼓励和目光敏锐的编辑源泉,正由于此,最终出版的本书比我所能期望的要好得多.我感谢以上所有的人,也要对不知不觉中带入最终版本的各种差错请求宽恕.我抱歉地说,这些都只是我的责任.

约翰·L·卡斯蒂
圣塔菲学院,新墨西哥州 [xiv]

目 录



第1章 极小极大定理(对策论)

[1]

你死我活的对策

在日常闲谈中,"game(游戏)"常被人们认为仅仅是学童的娱乐,是一种为逃避家庭作业和钢琴课来消磨他们的日子的一种方法,多半是玩诸如蒙眼捉人、追逐游戏或者捉迷藏之类的游戏.但对许多成人而言,"game(对策)"这一术语使人想起在充满烟雾的咖啡馆中躬身坐在棋盘前苦练棋艺的棋手,或者在同样是充满烟雾的董事会的会议室里的实业巨头的形象,他们都在拼命寻求能使他们比竞争对手处于有利地位的策略.后者这些情景,对策的结局取决于局中人所采取的策略,就构成了我们现在称为数学对策论的出发点.而使对策论成为一种"理论"的基本组成部分,不是探索性的论据、经验法则、趣闻的根据、荒诞故事的收集,而是极小极大点的概念,对策中所有局中人的一组最优策略.让我们先从一个非常实际的例子开始来说明一般的概念.

1943年初,新几内亚岛①的北半部由日本控制,而同盟国控制了该岛的南半部.情报部门的报告指出日本正调集一支护卫舰队增援其岛上的部队.该护卫舰队可以采取下列两条航线中的一条:(1)新不列颠岛以北,但预报那里将有雨而且能见度很差,或(2)南部航线,预期那里的天气晴好.据估计,不论走哪条

① 译注:仅次于格陵兰岛的世界第二大岛.

路线都需要有二天的航程.

根据收到的这些情报估计,同盟国最高统帅麦克阿瑟(Douglas MacArthr)将军命令同盟国空军西南太平洋地区司令肯尼(George C. Kenney)将军对日本护卫舰队给予最大可能的打击.肯尼可以采取把他的大部分侦察机派往南线或北线的选择.他的目的是要极大化可期望的能轰炸到该护卫舰队的天数,所以他要让他的侦察机尽快找到该护卫舰队.因此,肯尼有两种选择:(1)用他的大多数侦察机搜索北线,或(2)集中搜索南线.结果(用对策论中的术语说就是"支付")将由能让肯尼支配来轰炸到该舰队的可期望的天数来度量.面临双方司令官的总的情况可以用图1.1的"对策树"来表示,图中概述了称为俾斯麦海战[3]的情况.

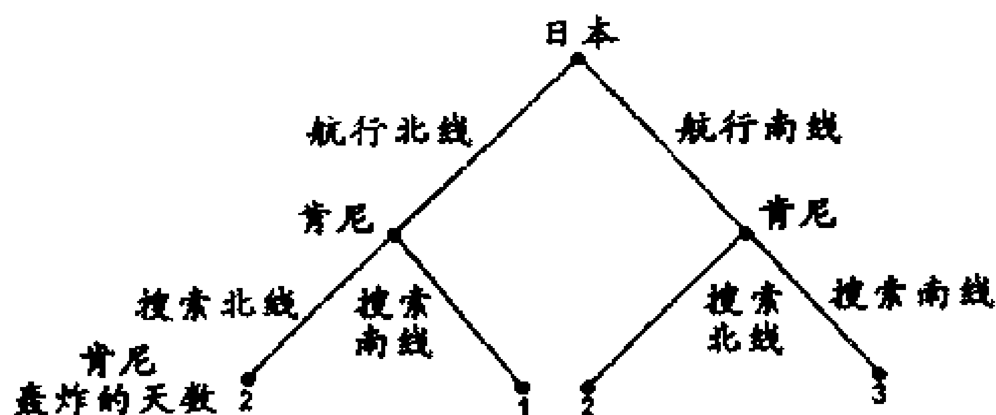


图 1.1 俾斯麦海战的对策树

(用专业术语来讲,对策论学家把这类对策树称为对策的扩张形式.)

图1.1应按以下方法读出:从顶部结点开始,日方司令官可选择左分支(航行北线)或右分支(航行南线).这两个分支的每一个都引出一个标为"肯尼"的结点,它指明这些结点是肯尼将军的决策点.肯尼的选择或是左分支(搜寻北线),或者选择右分支(搜寻南线).在双方司令官做出他们的选择之后,在树的最底部的每个结点的下面列出了一个数字.如果双方司令官的决策

导致该特定终点的话,这个数字就是肯尼能利用的情报估计声称的轰炸的天数.当然,司令官实际上并不按图上建议的顺序的样子做出他们的选择.相反地,每个司令官都是在不知道对方将会怎样做的情况下独立采取行动.

显然在做出他们的决策时,肯尼将军和日方司令官所关注的事情截然相反:对肯尼将军来说什么事情是好事,对日方司令官来说就是坏事,反之亦然.因此,我们用轰炸天数来衡量同盟国的支付,而把这个数字的负值作为对日方的"回报".所以不论哪一方赢,另一方就是输.这就是所谓的"零和局势"的一个例子,因为双方司令官的支付加起来为零.

表达整个局势的更为简洁的方法是使用所谓的支付矩阵,它定义了对策的正规形式.下面就是俾斯麦海战的支付矩阵表示.矩阵的行表示肯尼将军能采用的选择,而矩阵的列代表日方司令官安排的选择.按约定,矩阵中的各项是"行局中人"在现在这种情形,就是肯尼将军和同盟国的支付.因为同盟国和日方所关注的事情恰好相反,"列局中人"(日方)的支付就是这些数字的负值.参照图1.1中所示对策树,我们看到从树顶到树底部结点的每条路径下面的数值和这些支付是相同的,给定这些可能采取的行动方向和支付结构,要决定的问题是:应作出什么样的合理的命令.

		日方	
		航行北线	航行南线
同盟国	搜索北线	2天	2天
	搜索南线	1天	3天

俾斯麦海战的支付矩阵

我们已假定肯尼想要极大化他能够轰炸日方的天数.如果他搜索北线,不管日方决定航行走哪个方向都能保证有2天的轰炸时间.但是如果他搜索南线,如果日方船队航行北线,则肯

尼只能得到一天的轰炸时间.但如果日方航行南线,那么肯尼将得到3天的轰炸时间.所以为避免一旦他查明日方已决定做什么而有任何遗憾,肯尼应选择他能轰炸日本舰队的最少天数中的最大值(极大化).这意味着他应搜索北线.由类似的一串推理,日方司令官的不会感到遗憾的选择是航行北线,因为这是一个使日方船队暴露给同盟国轰炸机的最多天数中的最小值(极小化)的决定.

从肯尼将军和日方司令所面临的这种局势的初等而常识性的分析拓广一下,我们得到结论:明白事理的决策者将寻求能在最坏处境下给他(或她)最好可能支付的行动方向,也就是,其对手采取他(或她)的最佳对抗行动所取的最好支付值.显然,这导致局中人每人都采取可以称作为"不愿冒风险"的决策:为了避免招致不必要的输而舍弃可能的赢的决策.现在让我们来看看[5]怎样能直接从对策的支付矩阵得到这些不愿冒风险、合理的行动方向.

回想一下俾斯麦海战的支付矩阵,行局中人(同盟国)想极大化其极小的支付.所以我们在矩阵的每一行写下极小的表值,表示肯尼将军能采取的行动的支付.类似地,列局中人(日方司令)想极小化使他们被暴露而受轰炸的最大天数.从而我们写下矩阵每列的极大值.做了这个练习之后,我们得到如下所示的阵列:

		日方		
		航行北线	**航行南线**	行极小
同盟国	**搜索北线**	2天	2天	**2**
	搜索南线	1天	3天	1
	列极大	**2**	3	

按照我们关于什么是构成一种合理选择的不愿冒风险的概念,同盟国要求行极小中的最大值,而日方要求列极大中的最小

值.嗨,你瞧!这两个数字(在阵列中用黑体表示)在一对决策:同盟国搜索北线,日方航行北线处的值是一样的.这样的行动组合,在该处,行极小中的极大值("极大极小")等于列极大中的极小值("极小极大"),称为对策的平衡点.这是因为由选择这些行为,两个局中人确保了他们自己的某种极小支付——而不用管他们的对手采取什么行动.因此,两个局中人都不会单方面背离他或她的平衡决策.而且,一旦得知对手的选择,局中人都不会对其决策感到遗憾.因为双方都注意到,考虑到他们对手的选择,若作不同的选择,他或她的结果可能会更坏.换句话说,在如下意义下平衡解是"防弹的"或稳定的,即任一个局中人都能先于其对手声称他或她的选择在知道其对手不可能利用此情报来得到更好的支付的情况下是安全的.

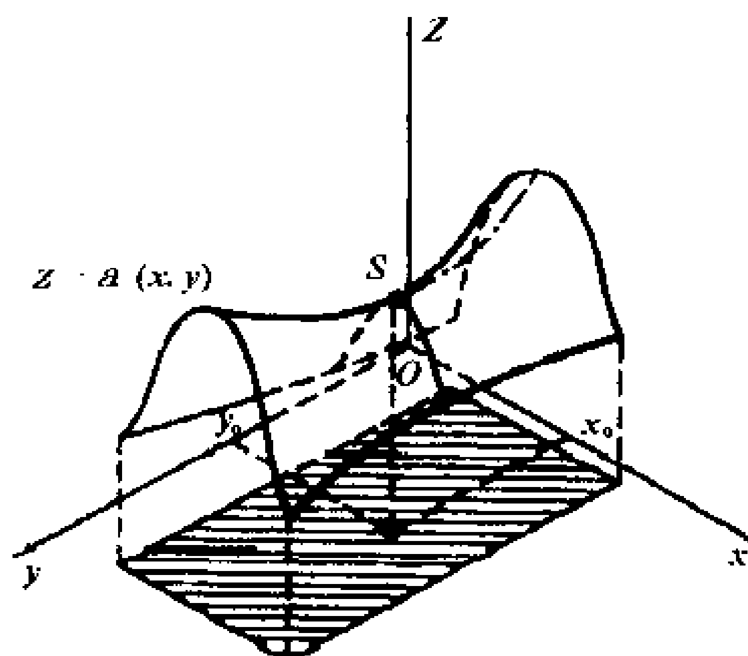


图 1.2 对策论的鞍点

这类的平衡决策点常常称之为鞍点.由于把对策的一局的支付 z 想象为由一个依赖于称之为 x 的行局中人作出的选择以 [6] 及我们将称之为 y 的列局中人的决策的数所给出,就产生了这样的命名.换句话说,支付是 x 和 y 的一个实值函数,我们将记

作 $a(x,y)$. 若 x,y 和 $a(x,y)$ 都是实数,则函数 $a(x,y)$ 能由图 1.2 所示的三维空间中的一个曲面几何地表示出来. 把这个曲面看作一幅高程图,其中选择 x 和 y 分别是纬度和经度不变的直线,于是,支付 $z = a(x,y)$ 仅仅是这两条线相交处的高度而已. 行局中人想得到这个曲面上的最高峰值,与之同时,列局中人想得到最低谷的值. 所以如果有像图中的 S 那样的一点,它同时是 x 方向的最高点和 y 方向的最低点,那么我们就有看起来像图中所示的马鞍形曲面这样的曲面. 这就是导致术语"鞍点"的这种局势的几何结构. 这样一点也常常称作极小极大点.

在俾斯麦海战中,一对选择 x = 搜索北线和 y = 航行北线恰好就是这样一个鞍点. 有趣的是在实际的俾斯麦海战中,两个司令官确实采取了这些决策(结果导致了日方的惨败).

鞍点的重要性就在于它表示了两个局中人的一种决策. 局[7]中人都不能由单方面背离它而做出改进. 总之,任何一个局中人都能先于另一个局中人宣称这样一种选择并且不会因这样做而造成任何损失. 所以,每个局中人的最佳选择是在鞍点处的决策,这称为纯策略对策的一个"解". 这是因为不论对策进行多少次,每个局中人的最佳选择总是取他或她的鞍点决策.

但我们已从几何上看到鞍点同时处于支付曲面的一个方向上的最高点以及另一方向上的最低点. 利用支付矩阵,用代数术语来说,鞍点处于行极小的最大值和列极大的最小值相等的地方. 但的确容易想象有不存在鞍点的支付矩阵和几何曲面. 在这种情况下,对于一个局中人来说,没有易于理解的方法可用来避免不被碰巧事先获悉该局中人将要做什么的对手所利用. 但因为总是存在有关局中人意图的情报"泄漏"给对手的可能性,在这种情况下,明白事理的局中人应如何继续前进呢? 这正是作为对策的所有数学理论的支柱的中心问题. 但在回答这个问题之前,让我们暂停一下,先来阐述一下迄今为止我们从俾斯麦海战这个简单例子中学习到的对策论知识.

策略的对策

以上给出的俾斯麦海战的观点，尽管它是实际局势的一个粗糙而过分简化的描述，但仍完美地说明了数学家所思考的"策略的对策"所涉及的是什么概念．归纳为基本原则，策略的对策由三个相互联系的部分组成：

- *局中人*：一个对策包括最少两个具有不同利益的局中人．
- *行动*：在局的每个阶段，局中人从一组可能的决策(对每个局中人通常是不同的)中选择他们的行动步骤．局中人常常慎重考虑一个行动步骤，必须在不知道其他局中人所采取的行动的情况下作出他们的决策．我们还假定每个局中人只有有限个可能的决策，虽然某些令人感兴趣和重要的对策使用了无穷决策集(例如，一个实数区间)． [8]
- *支付*：在决策作出之后，每个局中人都得到对所有局中人按共同单位度量的某种支付．

由于术语的原因，让我们同意把选择行动的一条规则称之为*策略*．如果规则所表达的总是采取相同的行动，就称之为*纯策略*；否则就称之为*混合策略*．对策的一个解只不过是每个局中人所采取的一个策略，在不会感到遗憾的意义下它给予每个局中人以最好可能的支付．

这些条件的进一步细化发展导致许多不同类型的对策，其中的某些将在后面予以讨论．例如，如果对策包含每个局中人的一系列选择，我们就得到所谓的*多阶段对策*或*迭代对策*．我们眼下特别关心的是像俾斯麦海战那样的对策，其中只有两个利益截然相反的局中人．我们称这种局势为*两人零和对策*，因为求极大的局中人的支付正好是求极小的局中人得到的支付的负值．因此，两个局中人的全部支付总计为零．我们稍为详细一点来讲

讲这类对策.

两人零和对策

当我们思量日常生活中的对策时,我们通常会想到诸如性别之战、商业对策、战争对策或甚至如扑克或强手棋(Monopoly)①之类的事情.这些对策似乎都比刚概述过的那类策略的对策远为复杂.其复杂特征之一就是它们往往会包括多个局中人.所以,这看起来似乎比做一个只有两个局中人的对策方面的教学练习所花的精力要稍多一些,至少当我们的目的是要使我们的理论联系实际的时候是这样的情况.不过,研究两人零和对策有着实际的和数学的理由.

首先,两人对策有着极大的吸引力:当局中人的利益截然相反(零和情况)时,这类对策得到了完全的解决.这意味着我们能精确地计算这类对策中每个局中人的最优策略应该是什么.对于多人对策的研究而言,这些解法给我们以坚实的出发点,并提[9]供了与更复杂局势中的近似结果相比较的基准.此外,在现实生活中初看起来像是多人对策的许多局势能被简化为两个局中人的情形.例如,美国参议院中像预算案这种事情上的政治冲突,初看起来好像是有100个局中人的对策,其中每个参议员都要对付99个对手.然而,不用很仔细地阅读每天的报纸就可看到这种对策常可简化为两个局中人的情形:例如,自由派对保守派,民主党对共和党,或工商界与劳工的对抗.局中人的这类合并常常是实际局势的一种好的近似,并使我们能应用两个局中人情形的全部数学方法.

但是在两人零和对策中固有的纯粹竞争的思想常常是一个

① 译注:由2~6人参加,按骰子所掷点数走棋,以筹码币进行房地产交易,以赢得多数房地产为胜;源出商标名.

要人们很勉强接受的太强的假设．而且，现实生活中存在着大量的局势，其中局中人的利益只是部分地相反．但即使对这些所谓的多人合作对策，我们仍然能借鉴来自两个局中人情形的丰富经验和理论知识．例如，在本章后面我们将详细考虑的著名的囚犯两难对策就导致对在诸如超级市场竞争顾客、政治家寻求选票、或动物竞争食物那样——开始只有竞争者的群体中合作行为怎样能发展起来的许多洞察．初一看，这类局势表现为包括有许多局中人的局势．然而，结果是面对竞争者的总的局势的很多重要特性可通过考虑一对相互作用来把握住．因为很少有三个或更多的竞争者同时相互对峙的情形．这将转而导致一系列两人对策．

所以记住这些想法，我们回到基本的令人困惑的问题：明白事理的局中人如何在没有鞍点的两人零和对策中进行活动呢？让我们通过再次考虑一个在美国独立战争时期（1775—1783）出现的有点过于简化的军事态势这样的对策问题．

康科德军火库对策

英国人决定要进攻在康科德[①]的美国军火库．同时美国情报部门截获了这个重要情报，但是美国并不知道英国将走哪条路线：走陆路还是走海路．不幸的是，美国的军力要同时抵御两 [10] 条路线的进犯，力量是太小了，因此美国最高指挥部必须选择其中的这条或另一条路线来防御．

而事实的真正要害是，英国人的弹药不足．所以如果两军相遇，英国人将撤退．但如果两军不相遇，英国人将占领弹药库并获得大量弹药的控制．如果发生了这种情况，双方都必须对英国人从康科德返回时采取什么行动作出决策．美方或可选择在已

① 译注：美国马萨诸塞州东部城镇．为美国独立战争的始发地之一．

知的英方返回路线上伏击，或进兵军火库并立即在军火库进攻英国. 同样，英国人或可以选择立即在白天撤离军火库或等到夜间再从军火库撤退. 这些不同的可能性导致每一方能采取四种不同的行动步骤，分别标以 A-Ⅰ，A-Ⅱ，…，B-Ⅲ，B-Ⅳ. A 表示美方的选择，B 表示英方的选择：

A-Ⅰ = 陆路防御，然后伏击，　　B-Ⅰ = 从海上来，然后立即离开，
A-Ⅱ = 陆路防御，然后进攻，　　B-Ⅱ = 从海上来，然后等到夜间，
A-Ⅲ = 海上防御，然后伏击，　　B-Ⅲ = 从陆路来，然后立即离开，
A-Ⅳ = 海上防御，然后进攻；　　B-Ⅳ = 从陆路来，然后等到夜间.

现在我们来考虑支付. 要指出的第一点是两军的利益是截然相反的. 因此，康科德军火库对策是一个两个局中人的零和对策——就如同俾斯麦海战那样. 所以我们就任意地商定度量美方的支付，英国人在每种情形中得到的支付为美方支付的负值.

因为英国人的弹药不足，如果两军相遇则优势属于美方. 如果美方采取行动 A-Ⅰ 或 A-Ⅱ，而英方以 B-Ⅲ 或 B-Ⅳ 响应就会发生正面遭遇. 如果美方选择 A-Ⅲ 或 A-Ⅳ，而英方选择 B-Ⅰ 或 B-Ⅱ，也将出现正面遭遇. 这四种组合中的任一种对美方都给出最好可能的结果，所以对每一对这样的选择我们都给它们，比如说，2 点的支付. 对于矩阵中其余的表值我们说明如下. 如果英国人白天遇到伏击，他们将被歼灭——这对美方恰恰是好的. 这发生在行动对（A-Ⅰ，B-Ⅰ）或（A-Ⅲ，B-Ⅲ）上. 所以在这样的情形中美方又得到 2 点的记分. 但是如果在夜间英国人遇到伏击，[11] 他们就能克服困难后到达目的地，并给美方以 0 点支付. 这些就是（A-Ⅰ，B-Ⅱ）和（A-Ⅲ，B-Ⅳ）的行动对. 现在如果美方进攻军火库而英国人已撤离，即选择（A-Ⅱ，B-Ⅰ）和（A-Ⅳ，B-Ⅲ），美方也得分 0 点. 但若美方进攻并发现英国人在等待夜间撤退，双方都将蒙受惨重损失而美方只得到 1 点. 这些决策相应于行动对（A-Ⅱ，B-Ⅱ）和（A-Ⅳ，B-Ⅳ）. 把所有这些信息放在一起，我们就能写下支付矩阵中的有关表值如下：

	英国			
	B-Ⅰ 海路 立即走	B-Ⅱ 海路 等到夜间	B-Ⅲ 陆路 立即走	B-Ⅳ 陆路 等到夜间
美国				
A-Ⅰ 陆路、伏击	2	0	2	2
A-Ⅱ 陆路、进攻	0	1	2	2
A-Ⅲ 海路、伏击	2	2	2	0
A-Ⅳ 海路、进攻	2	2	0	1

粗略地审视一下支付矩阵就能发现每行的最小值是0这样一个事实;因此,这些极小中的极大就是0.另一方面,每列中的最大值是2,这样就得到这些极大中的极小就是2.极大极小点和极小极大点是不一致的;就这个对策而言没有鞍点.结果是,美方和英方司令官都没有他们可以采取的清晰地、“防弹的”行动步骤——甚至事先向其对手宣布——一旦获悉其敌手的行动时也不会冒严重遗憾的风险行动步骤.简言之,康科德军火库对策在纯策略意义下无解,司令官中的一人过早地泄露他的特定行动步骤就会导致他将失去如果他不泄露的话不必放弃的点数.例如,在没有有关提前知道英方计划的情报的情况下,A-Ⅰ或A-Ⅲ看起来对美方有利,因为除了英方的一个选择外,每一个都给出2点的最大支付.但是如果美方司令官事先知道(或许通过像内森·黑尔①这样的间谍的报告得知)英方将走海路、并等待到夜间撤离(行动B-Ⅱ),他当然就会避免采取行动A-Ⅰ,因为相对于英方的这个特定选择,这个行动给予美方司令官的是最小支付(同时又是最大的遗憾).事实上,如果英方事先宣称B-Ⅱ为其目的,行动A-Ⅰ [12]

① 译注:Nathan Hale,1755.6.6~1776.9.22,美国独立战争时期的军官,在侦察英军时被捕牺牲.毕业于耶鲁大学(1773).

就是美方司令官最坏的可能选择.所以,这里我们就有了一个在纯策略意义下无解的对策的例子;对每一方而言,不管另一方选择做什么都不存在可采取的最好行动.简言之,不存在鞍点.

在这样的对策中,我们自己感受到的情况类似于很早以前试图求解方程 $x^2+1=0$(该方程无实数解)的方程论研究者所面临的情况.这个困难的历史性解决是创造了一种新的数的概念,即,复数,在复数系中一切都恢复正常、可以理解.在对策论中也是这样,解决我们可称之为“无鞍点两难问题”的出路就是要创造我们认为合理的行为意味着什么的新概念.

我们已看到,如果对策有一个鞍点,每一方都能事先宣布他们的行动,而且无论怎样都不会危及他们获得最好可能的支付.所以事先知道你的对手将要做什么的信息无助于增加你的收入——当然要假设你和你的对手都是合理地行动的.但是在不存在鞍点的情形,所有可寄予希望的事都不再有效,因为那时我们已经失掉了关于“合理”意味着什么的概念.结果是要再现这类“对泄露情报具有的免疫性”的方法就是以如下方式行动:在你没有做之前你甚至不知道自己将要去做什么!尽管初一看,这听起来也许有点自相矛盾,特别是就我们按惯例把什么看作是构成“合理的行为”而言是如此,下一节我们将证明这种“没有知识”的权威意见可以翻译为一种最优策略概念的可行的推广,而且是一种将导致无鞍点两难问题的解决的推广.

让他们去猜吧

在鲍博·迪伦[1]的歌曲“鲍博·迪伦的第115个梦”中,他说到已从监狱中逃出,然后必须决定是否要返回监狱帮助他的朋

① 译注:Bob Dylan,1941.5.24~,美国歌星和作曲家.其歌曲以崭新的文学歌词在流行音乐中独树一帜.

友或听任朋友们的命运安排，自己乘船扬帆而去．在歌曲中，他让掷一枚硬币，在这两种可能性中作出决定．鲍博·迪伦的决策程序可用来极好地阐明在无鞍点对策中支配如何选择行动的步骤的原则．

在这种对策中，由于前面概述过的原因，局中人把他们的选择对其对手保密是至关重要的．有什么使你的决策保密比随机选择你的决策更好的方法呢！这种方法的特点是直到由诸如轮盘赌轮子的旋转，或者鲍博·迪伦的硬币抛掷的某种随机化机制实际上发出命令作出选择之前，局中人自己都还不知道他们将要采取什么行动．当然，通常会是这样一种情况，即某些选择看起来比其他选择更有吸引力．所以并非所有可能的行动都给以同等的权重；于是，为做出选择所需要的是一个偏重的硬币或者是某些带权重的骰子．因此，我们现在把局中人的策略看作是由规定了由这种随机化机制所选择的任何特定行动的可能性的一组概率给出的．

当然，如果行动是随机选择的，说它有一个确定的支付就不再有意义．现在局中人最好是把由使用某一策略得到期望支付看作是应用该策略所得到的回报的度量，其中期望值是由考虑所取的可利用的不同行动的相对可能性来计算的．为牢牢记住这些概念，这里有一个能阐明无鞍点对策中的最佳局的熟悉的儿童游戏．

石头—剪刀—纸对策

这是一个有两个局中人的对策，这两个局中人分别称为马克西米利安（Maximilian）和米涅瓦（Minerva）（以下就简称为 Max 和 Min），他们必须同时在以下三个可能的选择中选一个：石头、纸或剪刀．这种对抗的结果由下列规则给出：

1．纸包住石头．
2．石头粉碎剪刀．
3．剪刀剪开纸．

假设有 1 个单位的支付给赢者，石头—纸—剪刀对策的支付矩阵由下列阵列给出.

		Min		
		纸	剪刀	石头
	纸	0	-1	1
Max	剪刀	1	0	-1
	石头	-1	1	0

[14]

我们首先要指出 Max 赢得的就是 Min 输掉的，反之亦然. 所以这是一个零和对策. 其次，行极小(-1)的极大值不等于列极大(+1)的极小值；因此，对策没有鞍点. 这就意味着如果 Max"偷看"，他就能获得超过 Min 的好处，因为他能出剪刀对纸、石头对剪刀，以及纸对石头，因此总是获胜. 因此，如果两个竞争者都诚实地对局，那么每个人都必须以随机的方式从这三个可能的选择中独立地选择一个. 又由于支付矩阵的结构，关于这三种选择是完全无偏的，因此没有先验的理由来偏爱某个选择甚于其他选择. 因此，Max 和 Min 两人都将以相等的频率，每个为$\frac{1}{3}$，从三个选项中作出选择. 结果是 9 个可能的组合：纸纸，纸剪刀，……，石头石头中的每一个都将以$\frac{1}{9}$的可能性出现. 于是，平均说来，Max 和 Min 两人的支付将是：

$$\frac{1}{9}(0-1+1+1+0-1-1+1+0)=0. \qquad (*)$$

现在假设 Min 继续以每个频率为$\frac{1}{3}$的方式在纸、剪刀和石头中来选择，但 Max 却改变他的频率为纸 $=\frac{1}{3}$，剪刀 $=\frac{1}{2}$ 以及石头 $=\frac{1}{6}$. 现在 Max 的平均结果或期望结果为：正如结果所表明的这也是 Min 的期望结果：

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times0\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times(-1)\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times1\right)+$$

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 1\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 0\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times(-1)\right)+$$
$$\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times(-1)\right)+\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times 1\right)+\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times 0\right)=0.$$

事实上，对于 Max 所选的这三种可能选择的任何可能性而言，Max 也将恰好得到同样的结果. 从这个事实，我们得出结论：就 Min 的等可能性混合策略而言，Max 不可能改善其平均收益. 所以具有等可能性选择的混合策略是这个对策的一个平衡点. 在同样的意义下，极小极大点是具有鞍点的对策的一个平衡点. 因此，使用随机化其选择的策略，Max 和 Min 每一人都能宣布他或她对另一人的策略不必顾及对手能利用此信息来得到他或她 [15] 自己的更大的平均支付.

现在出现的问题如下：

- 对任何两人零和对策，我们怎么知道最优混合策略是存在的？我们已看到这样一个策略在石头—纸—剪刀对策中是存在的. 但是也许这是因为该对策有某些特殊性，而一般说来，不存在这种最优混合策略.
- 如果这种最优混合策略的确存在，我们怎样计算它们呢？对于石头—纸—剪刀对策的支付矩阵的对称结构，强烈地暗示对每个局中人要做的"正确"事情是混合具有等可能性的纸、剪刀和石头的选择. 但如果支付偏爱某些行动甚于其他行动. 合乎情理的是按以下事实来挑选最优策略，倾向于更频繁地以这些高支付行动的频率而不是不那么偏爱的行动来对局. 所以，当有了一个特定的支付矩阵时，我们怎样计算对不同的选择加权的最好方式呢？

这些正是冯·诺伊曼[①]在 1928 年发表的著名的极小极大定

① 译注：John von Neumann，1903.12.3～1957.2.8，美国数学家，出生于匈牙利，对量子物理、数学逻辑、气象学和高速计算机的发展都有重大贡献；关于对策的数学理论对经济学极有影响.

理(对策的数学理论的关键结果)回答的问题.该定理断言对每个两人零和对策每个局中人都有一个最优混合策略.

极小极大定理

让我们简要地看看为什么极小极大定理是如此的重要.如果一个对策有像在俾斯麦海战中那样的鞍点,那么每个局中人要作什么的选择是清楚的:采取导致鞍点的行动.这确保了每个局中人的最好可能的支付,假设每人都按他或她自己自私的最大利益来行动.而且,每个局中人都能事先宣布他或她的鞍点决策,不必顾及对手能利用此信息以获得更好的支付.但这些性质是在鞍点处极大极小等于极小极大这一事实的推论.如果对策没有鞍点,那么这些性质失去了,从而我们要面对的是对每个局[16] 中人而言不存在明显的最优方法.

极小极大定理向我们展示了在没有鞍点的对策中怎样重建合理的行动步骤的概念.极小极大定理表明重新把握住合理性的方法是利用随机化局中人在所有可能的行动中的选择的策略.如果局中人这样去做的话,极小极大定理保证对每个局中人存在一组概率,使得每个人都对他或她的行动按这些概率加权,那么他或她每人都将得到同样的平均支付——并且如果对手是合理地对局的话,这也将是每人能期望得到的最优支付.最后,局中人能事先透露他们的概率集合而决不会以任何方式损害他们自己的利益.让我们用较长的篇幅来察看一下20世纪数学的这个主要成果.

紧跟法国数学家E·波莱尔①关于两人零和对策的1921年

① 译注:Emile Borel,1871.1.7~1956.2.3,创立了点集测度的第一个有效理论,与法国的R·贝尔和H·勒贝格一起开创了实变函数的现代理论.

的工作，其中能供局中人支配的行动不多于4个（即，纯策略）.策梅洛[①]猜想对于每个局中人而言，应存在能给他们双方以同样期望支付的混合策略，而且与每个局中人能利用的行动数目无关.并且，策梅洛声称这个公共收益是支配着对策论学家所意味的"合理对局"的不愿冒风险准则下局中人能希望得到的最好的收益.

我们早就知道，对于有鞍点对策的情形，这一定是必要的，而且在这种情形中两个局中人有导致公共支付的最佳纯策略.用对策论的行话来说，这个公共支付通常称之为对策的值.但对于无鞍点的对策而言，无论从几何或代数方面都不是如此简单和清晰的了.直到1928年，冯·诺伊曼通过给出一个无懈可击的数学证明确认了策梅洛猜想的正确性，从而把整个对策论的研究置于坚实的基础之上.在这之前这些问题始终没有弄清楚.因为极小极大定理构成了许多对策的数学理论赖以建立的基础，我们将用几节来详细地描述这一定理.

冯·诺伊曼的极小极大定理做出很强的断言，即对每个局中人而言总存在至少一个混合策略，这样就使得当他们用这些策略时，每个局中人的平均支付是同样的.而且，若他或她的对手是合理地对局的话，这个平均支付是每个局中人就能指望得到的最好的收益.以下是这个重要结果的比较正式的陈述： [17]

极小极大定理　对于每个两人零和对策，对每个局中人而言都存在一个混合策略使得当局中人使用这些策略时双方的期望支付有相同的值 V.而且，V 也是每个局中人能指望从对策的一局中得到的最优支付；因此，这些混合策略是两个局中人所用的最优策略.

---

① 译注：Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo，1871.7.27 ~ 1953.5.21，德国数学家，主要贡献是集合论基础.

这个定理所意味的就是对每个局中人存在一组概率,使得如果他们按照这些概率对他们的行动加权的话,他们每个人都恰好收到同样的平均收益 V(实际上,因为对策是零和的,对极小化的局中人来说期望支付是 $-V$).

我们可以通过再次考虑前面给出的石头—纸—剪刀对策来阐明这个结果.这里我们声称(无需证明!)每个局中人的最优混合策略是对纸、剪刀和石头这三种选择赋以相同的权.使用这些概率,我们求出每个局中人的平均支付为 $V=0$.冯·诺伊曼结果的困难部分是证明没有一个局中人能通过偏离由极小极大策略规定的概率来得到较好的期望支付,这是我们在石头—剪刀—纸对策中通过直接计算证明的事实.十分令人关注的是为了证明极小极大定理,冯·诺伊曼必须对早先由布劳威尔①建立的不动点结果(见第2章)发展一个重要的推广.想要了解这些细节的读者请查阅文献目录中为本章列出的资料.

所以正如引进复数重建了任何多项式方程的可解性,与极小极大定理紧密相联的混合策略的概念通过确保平衡点存在性而重建了任何两人零和对策的可解性——但现在是在混合策略空间中而不是在纯策略空间中.通过把我们所指的策略的概念从单个的行动步骤(纯策略)推广为在所有可能行动上的随机化(混合策略),冯·诺伊曼成功地建立了合理选择的存在性,即局中人都能事先宣布其策略而不给他或她的对手丝毫好处;也没[18]有局中人能通过单方面背离最优混合策略而改善其收益.无怪乎后来冯·诺伊曼会说"就我所知道的,没有那个定理……就不可能有对策论……我认为直到'极小极大定理'被证明之前没有什么东西是值得发表的."现在让我们来看一个表明混合策略在

---

① 译注:Luitzen Egbertus Jan Brouwer,1881.2.27~1966.12.2,荷兰数学家,创立了数学中的近代直觉主义(一种认为作为思维构造的数学的本质是受不言自明的规律所支配的学说).他的研究完全转变了拓扑学.

起作用的简单例子.

战斗机和轰炸机

在第二次世界大战中,战斗机飞行员通常是从阳光方向突然俯冲向轰炸机来攻击他们的,这是一种称为"阳光下的野蛮人"策略的手段.但当每架飞机应用此策略时,轰炸机飞行员就只要戴上他们的太阳镜并目不转睛地盯着太阳寻找战斗机.因此就出现了从下面径直向上攻击的第二个策略.当战斗机未被发现时,这种办法证明是很有效的,但如果战斗机飞行员被发现了,那对他来说总是致命的,因为当飞机爬高时总比飞机俯冲时要慢很多.因为这个策略几乎与日本神风突击队员(Kamikaze)[①]的攻击风格截然相反,我们给它标名为"Ezak-Imak"策略("Kamikaze"的倒拼[②]).所以现在我们就有了一个战斗机飞行员和轰炸机机组人员之间的两人零和对策.战斗机或能使用阳光下的野蛮人策略,或 Ezak-Imak 策略,与之同时,轰炸机机组人员能通过枪炮手的炮塔或仰视或俯视.如果我们同意把在一次单独作战任务中幸存下来的机会作为对战斗机飞行员的支付的度量的话,那么我们就可以用由以下的支付矩阵中给出的典型的幸存概率来描述对策理论局势:

		轰炸机机组人员	
		仰视	**俯视**
战斗机飞行员	**阳光下的野蛮人**	0.95	1
	Ezak-Imak	1	0

这显然是一个没有鞍点的对策(为什么?).所以不存在即

① 译注:Kamikaze 为第二次世界大战期间日本空军敢死队,队员驾驶装载炸弹的飞机撞击军舰等目标,与之同归于尽.

② 译注:反神风突击队员式的策略,逃跑向上爬高之意.

使其对手得知了对方选择的消息后也无法利用的战斗机飞行员和轰炸机机组人员能选择的纯策略．作为替代，双方都必须混合他们的行动，有时这样行动，有时又那样行动；他们必须在[19]任一给定的出击中从对他们可利用的各种可能的行动中随机地选择一个行动．当然，这并不意味着要采取的选择具有相等的可能性．战斗机飞行员的支付表明阳光下的野蛮人策略几乎总是成功的，同时 Ezak-Imak 策略是十分冒险的，因为如果轰炸机机组人员碰巧正好是俯视的话，那么它就必死无疑．因此，直觉使人联想到在阳光下的野蛮人和 Ezak-Imak 之间的最优混合将强烈地偏爱前者，只是为了使轰炸机机组人员公平合理地按规则进行，战斗机飞行员才偶尔选择有风险的 Ezak-Imak 行动．用后面我们将要讨论的方法，将证明的结果为，战斗机飞行员的最佳混合策略是在每 21 次出击中使用阳光下的野蛮人策略 20 次．

战斗机飞行员可以这样来执行这个策略，即把 20 个白球和 1 个黑球放在一个口袋里并摇动它们．然后在每次战斗任务之前他从袋中取出一个球，白球意味着背向太阳（阳光下的野蛮人策略）出击，黑球告诉飞行员从下方进行攻击．结果表明对轰炸机机组人员而言，仰视和俯视之间的最优混合是在 21 次中的俯视 20 次．重要的是要注意这些比例是在平均意义上应用的，所以，例如，对于轰炸机机组人员的策略并不意味着如果他们已俯视过了 20 次，这次他们就应是仰视了．战斗机飞行员和轰炸机机组人员双方在开始每次飞行之前，他们每人都从袋中选一个球，然后按他们拿到的球的颜色所下的命令行动．

用下节的方法，战斗机飞行员和轰炸机机组人员的这些混合策略导致的期望的安全水平为 0.9524，稍高于总是遵循阳光下的野蛮人策略的战斗机飞行员的肯定安全水平 0.95．当然，为获得这个稍高的幸存下来的期望水平，战斗机飞行员必须接受由于战斗机飞行员和轰炸机机组人员双方同时拿到黑球而必

死无疑的可能性(其概率是$\frac{1}{21}\times\frac{1}{21}\approx 0.0023$).现在我们来看一下这些数是怎么来的.

计算最优混合策略

这里我们只考虑一个局中人或另一个局中人(但不必是双方)至多有两个可利用的行动(即,两个纯策略)的对策.计算局中人双方都有两个以上纯策略的一般情形的最优混合策略的方法比我们能在这里描述的方法要稍微复杂一些.对于一般情形的细节,读者可以查阅文献目录中引用的文献. [20]

为了解这些比较简单的对策的最优混合策略的计算中包含了什么内容,我们来看一下局中人 A 有两个纯策略,而局中人 B 有三个纯策略的一个对策的下列支付矩阵:

		局中人 B		
		B - Ⅰ	**B - Ⅱ**	**B - Ⅲ**
局中人 A	**A - Ⅰ**	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$
	A - Ⅱ	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

假定局中人 A 的最优混合策略是以采用策略 A - Ⅰ 对局的次数所占的部分为 x,而以 $1-x$ 用 A - Ⅱ 对局.局中人 A 对抗局中人 B 的三个策略的期望支付或平均支付为:

$$0x+1(1-x)=1-x \quad \text{对抗策略 B - Ⅰ},$$

$$\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}(1-x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x \quad \text{对抗策略 B - Ⅱ}, \qquad (*)$$

$$\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}(1-x)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x \quad \text{对抗策略 B - Ⅲ}.$$

通过画出作为局中人 A 运用策略 A - Ⅰ 的次数所占部分这个量 x 的函数,即每个期望支付函数的图形来图示这些结果是有启发性的.表示这些期望支付的每条曲线恰好是如图 1.3 中

所示的一条直线. 对于 x 的每个值, 在该点处直线的高度代表了局中人 A 选择 A－Ⅰ所占次数的部分为 x 及选择 A－Ⅱ所占次数的部分为 $1-x$ 时局中人 A 对抗局中人 B 的三个策略的支付.

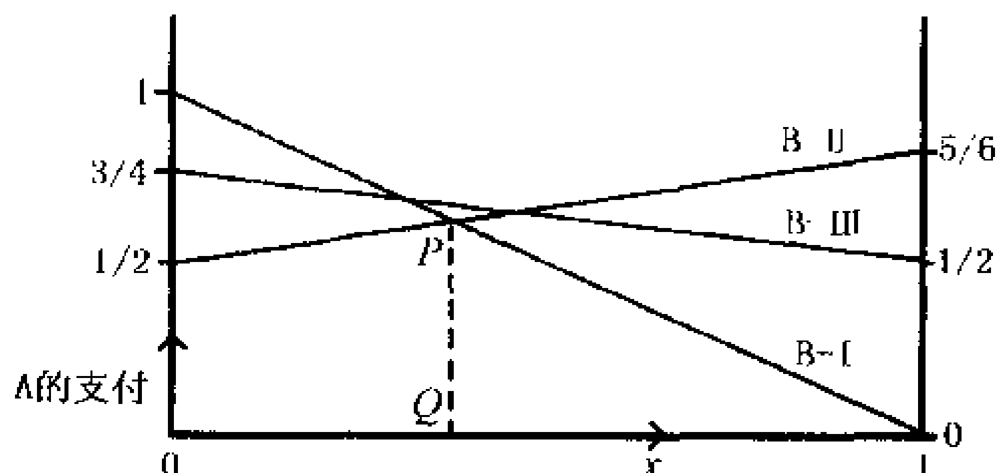


图 1.3 对策的图形解

局中人 A 关心的是对每个可以选到的 x 的每个可能值, 他或她能得到的最小支付. 从几何上说, 这个最小期望支付是在三条直线在 x 的每个值处的最低点上. 因此局中人 A 力图选择 x, 使得其最小支付尽可能大. 换句话说, A 将寻找 x 值使之相应于三条直线的最低点中的最高点. 这出现在极大极小点处, 即[21] 在图中的 $x=Q$ 处. 这相应于三条线的下包络上的最高点 P. 距离 PQ 表示先前我们用 V 来表示的对策的值, 而距离 $x=0Q$ 表示局中人 A 应使用策略 A－Ⅰ以便得到这个最优期望支付所占的次数的部分. 当然, 距离 $1-x=1-0Q$ 则表示局中人 A 应使用策略 A－Ⅱ所占次数的部分.

注意以下一点是重要的: 表示策略 B－Ⅲ的直线整条都处在三条策略线的下包络的上面. 这意味着对于局中人 B 而言, 纯策略 B－Ⅲ是不值得考虑的, 因为运用此策略对抗局中人 A 的最优混合策略将导致局中人 B 的支付不会好于运用另外两种策略的某种组合所能达到的支付. 对于局中人 B 这是不好

的,局中人 B 是极小化的局中人,因此他要得到最小可能的支付,而不是最大的支付.所以,局中人 B 可从不考虑策略 B－Ⅲ(这从以下的事实来看是显而易见的:局中人 B 的最优混合策略中,该策略出现的概率为零).

从对策的几何表示看到极大极小点通常只位于局中人 B 的策略线中两条线的交点处是相当明显的,因为三条或多条线交于单一点处是一组非常特殊的情形.但假设图 1.3 中 B－Ⅲ线下移并使之通过点 P.这时,策略 B－Ⅲ仍然不是局中人 B 的最优混合策略之一,因为使用该策略不能给局中人 B 带来比使用纯策略 B－Ⅰ和 B－Ⅱ组合更多的利益.当然,如果直线 B－Ⅲ再往下降,极大极小点变成 B－Ⅱ和 B－Ⅲ的交点,这时就不考虑策略 B－Ⅰ了.这种情形完全是普遍的;局中人 A 的极大极小点将总是位于局中人 B 的两个纯策略线的交点处.这使我们能把局中人双方的最优混合策略的计算减少为一个 2×2 对策的最优混合策略的计算.

[22]

我们通常要的是比从图 1.3 展示的图形解中读出更精确的对策的解.计算两个局中人精确的混合策略的方法是利用早先指出过的对策理论的论据,即当局中人 A 使用最优混合策略对抗纯策略B－Ⅰ或 B－Ⅱ中时,局中人 A 必须收到恰好同样的期望收益,即,我们所谓的对策的值.在石头—纸—剪刀对策中有过这种例子,其中 Max 使用任一混合策略得到的都是同样的平均收益——恰好是只要 Min 继续运用她的最优混合策略的平均收益.从前面给的方程(＊),我们知道局中人 A 对抗纯策略 B－Ⅰ和 B－Ⅱ的两个期望支付是:

$$E(\text{对抗 B－Ⅰ}) = 1 - x,$$

$$E(\text{对抗 B－Ⅱ}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x.$$

令这两个表达式相等,得到 $x = \frac{3}{8}$.把这个值代入到上面关系式

中的任一个都得到对策的值为 $V=\frac{5}{8}$.因此,局中人A的最优混合策略是用策略A－Ⅰ对局的次数占$\frac{3}{8}$,而用A－Ⅱ对局占余下的次数$\frac{5}{8}$.遵循这个策略,局中人A将得到$\frac{5}{8}$的期望支付.类似的论证可以证明局中人B的最优混合策略由以B－Ⅰ对局的次数占$\frac{1}{4}$,和以B－Ⅱ对局的次数占$\frac{3}{4}$组成,决不采用策略B－Ⅲ.用这样的混合容易算得局中人B将得到的期望支付为$-\frac{5}{8}$——正好是我们预期的一个零和对策的结果.

对策论——一种分类法

按照凯撒的看法,把全部高卢划分为三部分.在对策的数学理论中我们可以做一个类似的划分.首先,最经典的、发展得最[23]好的部分是迄今为止我们一直在讨论的零和对策这样类型的对策.就如我们已经知道的,有一个什么是构成这类对策的一个解的清晰的概念,即来自极小极大定理的混合策略.这个解不但是唯一的而且有无法估量的吸引力,即它提供了"合理行动"概念的数学表示.这个概念至少和我们在日常生活中对术语"合理"的理解的一种解释一致,即我们在会话中描述成"怀着最好的愿望,做最坏的准备",这一关于合理性的观点.

从数学的观点看,极小极大定理基本上完成了零和对策的研究,提供了与这种对抗的完善的行动理论相类似的某种东西.当然,真正实施最优混合策略的实际问题——或甚至为了检验局势的假设——可能是值得注意的问题.然而关于已经解决的问题那是没什么神秘可言了——不过对于对策论其余的分支来说情况就不是这样的了.为了完全起见,我们依次简要地考虑一下另外两个分支.

1994年,在诺贝尔奖九十三年的历史中,第一次把诺贝尔

奖金授予只是在纯数学领域所做的研究工作：诺贝尔经济学纪念奖由普林斯顿数学家J·纳什①和J·哈撒尼(John Harsanyi)及R·赛尔腾(Reinhard Selten)分享，由于他们在对策论中开创性的工作而获奖．大致说来，纳什所做的研究工作就是证明了一条定理，该定理把极小极大定理推广到有两个或更多个直接竞争的局中人的非零和对策——所谓的*非合作对策*的情形．为理解纳什的成就，让我们重新考察一下对策的解的概念．

考虑极大化局中人面临的局势．假设局中人考察了每个可利用的纯策略，挑出使用该策略对抗他或她的对手的每一个纯策略所能得到所有支付中的最小支付．然后极大化局中人选定给出这些极小可能支付中的极大值的策略．这就是我们所谓的*极大化极小策略*．完全类似的论证导致极小化局中人的*极小化极大策略*．把这两个策略合起来就称为对策的*策略的极小极大对*．

现在我们再来看一下策略的*平衡对*的概念．这不过是一对策略，使得局中人单方面背离他或她的平衡对中的*平衡策略*，比不背离该策略所得到的期望支付要差．极小极大定理的一个重 [24] 要推论就是策略的这两个相当不同的概念在零和对策的情形中是一致的：平衡对就是极小极大对，反之亦然，但是当对策是非零和对策时，它们就不是一致的了．Nash 定理讨论了这种局势．以下是他的结果的一种非正式的陈述．

纳什定理 *每个局中人有有限个纯策略的任一 n 人非合作对策(零和或非零和)至少有一个策略平衡组．*

我们要强调这个结果的三个方面：(1)在如下意义下它推广了极小极大定理，即它建立了零和以及非零和对策平衡解的存

---

① 译注：John Nash，1928 年生，美国数学家．可参看 John Milnor，"John Nash 获诺贝尔奖"，《数学译林》，v.15 (1996)，no.3，236～245．

在性;(2)它证明了可能有一个以上的平衡解;(3)它推广了到任何有限个局中人的情形.顺便提一句,第二点在试图把各种可能的纳什平衡点和看起来一点也不像我们在日常生活中考虑的"合理"的行为的事情相协调一致时带来了巨大的困难.我将把关于平衡点策略这方面或其他方面的更详细的讨论留待读者去查阅文献目录中列出的材料.

纳什的上述结果是有关非合作对策的.但是就像我们马上就会看到的那样,如果局中人同意合作——至少部分地合作——而不是互相残杀的话,那么局中人就可能都有所收益.这就导致了合作对策的思想,其中为了改善他们各自的支付,局中人可能形成不同的联合,或者,或许给其他局中人以旁支付以影响他们的行动.

从寻求这种 n 人合作对策的完全令人满意的解的概念的情况来说是朦胧不明的.由冯·诺伊曼和摩根斯顿①的先驱性工作开始,以及由 M·舒比克(Martin Shubik), L·沙普利(Lloyd Shapley)及其他人继续的、贯彻始终的、认真的努力,对这类对策发展了许多关于解概念——平衡点集、对策的核心和沙普利值,这里仅列举几个而已.其中某些(如沙普利值)是唯一的,而像对策的核心那样其他的就不是唯一的了.到目前为止,还没有一个解的这些方法能赢得对策论学界的一致意见,认为当至少[25]某种程度的合作是允许的时候,它构成对策中就局中人方面的表征"合理"行动的完全令人满意的方法.但是,在像本书那样的介绍性的图书中要去探究这些事情就离题太远了,所以,我把它留给读者去研究文献目录中列出的材料中这些不同的问题.现在让我们回来考虑当局中人的总支付不是零和时的两人对策.

极小极大定理适用于恰有两个局中人而且不论局中人选择什么样的行动,双方的总支付是零这样的对策.这两个性质的好

---

① 译注:Oskar Morgenstern,1902.1.24 ~ 1977.7.26,德国出生的美国经济学家.

处在于对两个局中人的利益是截然相反的情形，我们有一个纯竞争的对策，它允许我们定义导致关于每个局中人应如何作出反应的一个唯一、确切的规则的合理行为的清晰的数学概念.

若允许对策中有两个以上局中人以及(或者)假定一个局中人赢得的不必等于另一局中人输掉的支付结构，这将把我们带到更接近实际生活中运用的对策类型. 不幸的是，一般说总是如下的情况，当你愈靠近现实世界的令人难办的情况时，你就愈远离程式和结构化的数学世界. 对策论也不例外. 通过由容许这些新的特征加进对策中去，我们揭示了在局中人间至少有部分合作的可能性. 从数学观点看，这造成了众多的困难，因为，一般说，在这种局势中不再可能就明白事理的局中人应如何表现提供清晰的数学论证. 实际上，甚至不再可能与我们关于这种局势所意味的"合理"的行为相一致. 但这并不表示什么事也不能做了. 事实上，过去50年左右的时间里已作出了巨大的努力，就我们谈及的这类对策试图提出一个条理清楚的理论框架，少部分在前面已概述过. 所以，在本章余下的各节中，我们将通过察看阐明合作相对于竞争行为的有极大吸引力——而且是机敏——的某些方面来探究一些这样的推广.

我们首先来考虑改变对策的支付结构使得允许一个局中人的赢得不等于另一个局中人的输掉这样的收益所产生的影响. 这种简单的改变揭示了有时候局中人通过合作而不是竞争的收益将会更好的可能性.

[26]

胆 小 鬼

一个著名的对策，其基本原理至少可以追溯到远至古希腊时代①，这个对策包括两个彼此在一个相撞的过程上开车向前的

① 译注：公元前1200~公元前800.

司机.每人都有通过突然转向一边而避免相撞(C)成为"胆小鬼"的选择,或选择继续朝致命的相撞方向开去(D).如果两个司机都是胆小鬼,他们每人都将免于一死并收到3个单位的支付.但如果一个司机"因胆小而转向了"而另一个司机继续往前开,那么胆小鬼丢了面子(但没丢掉他或她的性命),而"勇敢的"司机赢得了显赫的胜利.在这种情形中,胆小鬼收到2个单位,而另一个司机收到4点.最后,如果他们双方继续向毁灭性的相撞方向开去,他们每人都可收到1个单位死神的酬劳.读者如果是在1950年代达到成年年龄的话将会认出这就是尼古拉斯·雷[1]导演的风靡一时的电影《无故的反叛》中由迪安[2]对抗他的中学复仇者布兹(Buzz)所玩的对策.仅有的不同是在影片中汽车是向悬崖开去,获胜的司机是在他的车越过悬崖之前最后从汽车中跳出来.

胆小鬼对策的支付在下面的矩阵中列出,为了尊重对策的好莱坞版本,我们把局中人称为琼波(Jimbo)和布兹.每一对支付中的第一项是琼波的,而第二项是布兹收到的点数.

		布兹	
		C	D
琼波	C	(3,3)	(2,4)
	D	(4,2)	(1,1)

我们要指出的第一点是对所有可能的选择而言,支付的和不是同样的常数.这样,对于考虑放弃纯竞争的、要使对手致命

① 译注:Nicholas Ray,1911.8.7～1979.6.16,美国电影编剧和导演.从影时美国正在探索腐败现象,他导演《孤独的地方》(1950)和揭露中产阶级家庭中青少年犯罪问题的《无故的反叛》(1955)等,提出青少年犯罪是整个社会的问题,不仅限于穷苦人家.

② 译注:James Byron Dean,1931.2.8～1955.9.30,美国电影演员.以扮演50年代惶惑、急躁、空想的青年典型而受到崇拜.

的态度代之以合作的——至少是部分合作的局中人可能是有利的.此外我们马上会看到在这个对策中对任一局中人都没有支配策略.这就意味着对任一局中人没有单个的行动步骤能给出最大的支付而不必顾及另一局中人所采取的决策.所以,例如,我们看到如果布兹采用停留在相撞路线上的致命策略,则对琼波而言采取闪避策略 C 是最佳的.但如果布兹他自己决定选择 C 来闪避,那么采取 C 就不是像 D 那样好了.所以闪避开道路的决策对琼波而言不是支配决策.类似的论证可用于对两位司 [27] 机都闪避或都继续在相撞路线上开的纯策略.所以在胆小鬼对策中的任一个局中人都没有支配策略.

为分析司机应做些什么，让我们首先从琼波的立场来看对策．他可以争辩如下：“如果我闪避，那么我的极小支付是 2 个单位，而若我笔直往前开，那么我的极小收益是 1．因此取这两个可能值的极大，我的合理行动是选择 C 并闪避开．”由布兹方面的一个类似分析导致同样的结论．因此，对双方司机都因“胆小而闪避”的两个结果的极小极大策略——如果不是布兹抓住了在车门把手处他的外套的袖子，因此在汽车越过悬崖之前当他正试图跳出去而未能成功的话，那影片中真要发生什么事了．这里要注意采取背离因胆小而闪避的策略的司机怎样能从中得益，以及这样做的话，始终会给另一个司机带来的由于这种背离而造成的不利影响．所以不仅是背离者伤害了另一位局中人，也把自己和另一个局中人置于他们可能会有的悲惨结局的境地．

现在从平衡策略的立场上来看一下这个对策.如果布兹和琼波选择了行动对(C,D)或(D,C)中的任一个,那么考察一下其支付就清楚没有局中人会有单方面离开该选择的动机.因此,平衡策略不同于极小极大策略——不像两人零和对策中的情形.

胆小鬼对策有其独特的特征,即不可能逃避与坚持要进行

对局的人对局的，因为拒绝对局从效果上看和进行对局并且输掉是一样的．此外，成功地作出危险的 D 选择许诺的局中人总是在损害另一个局中人的情形下取胜的，假定这另一个局中人是理智的．所以一个具有鲁莽、不顾后果名声的局中人在胆小鬼对策中确实比仅仅是理智的局中人享有优势．也许这就引起了许多学者对这类不合理的赢得策略的反感，因为多数教授类型的代表性人物看来很为他们自己既是不愿冒风险又是极端理智的男人和女人而感到骄傲，对于参与胆小鬼对策的这些人来说是一种不愉快的失败的组合．如果胆小鬼对策进行多次这就变得特别合理，因为得到早先的好处的局中人在以后通常能保持 [28] (甚至增加)这种好处．这种局中人一旦成功地利用了对手，这个局中人就有信心在将来能离开这种冒险的策略，同时又使他或她的对手更害怕背离谨慎的极小极大方案．

为说明支配胆小鬼对策支付结构和决策分析并非出于学术上的好奇心，现在我们来察看一个现实生活中的局势，在这种局势中，世界领袖们面对着和胆小鬼对策所展示的同样类型的选择和支付结构．

古巴导弹危机

毫无疑问，本世纪超级大国之间最危险的对抗发生于 1962 年 10 月，苏联企图把带核弹头的导弹布置在古巴．当约翰·肯尼迪（John F. Kennedy）总统于 10 月 14 日确认了这些导弹的存在性时，他召集了一个所谓的高层官员执行委员会来决定美国的行动步骤．考虑几种方案之后，执行委员会把选择缩小为两个：海军封锁或空袭．同样，苏联总理尼基塔·赫鲁晓夫也有两个可供他利用的选择：撤出导弹或留下导弹．用对策论的术语，我们可以用下列支付矩阵来概括肯尼迪和赫鲁晓夫所面临的局势：

		苏联	
		撤出	维持
美国	封锁	(3,3) (妥协)	(2,4) (苏联胜利)
	空袭	(4,2) (美国胜利)	(1,1) (核战争)

这里在每个支付中的第一项是美国选择的行动的优先排序,而第二项是苏联的排序,其中 4 是最好,3 则次之,等等.由于这些排序,古巴导弹危机具有和胆小鬼对策同样的支付结构.而且,大多数人对这个危机的基本看法确实是两个超级大国在"相撞路线"上.正如现在每个人都知道的那样,真正采取的决策是封锁和撤出,结果导致一种解决了所谓的古巴导[29]弹危机的妥协.所以,虽然在某种意义下,使苏联从古巴撤出了他们的导弹,美国"赢了"对策,苏联也得到了肯尼迪总统不入侵古巴的许诺,表明了危机的最终解决实际上是各种类型的一个妥协.

不言而喻,我相信在支付矩阵中给出的策略选择和优先排序提供的只是由现在著名的"十月中的 13 天"所详尽披露的古巴导弹危机本身的一个轮廓性的概括.首先,双方考虑的选择都要比矩阵中列出的两种可能选择要多,也要考虑每种选择的几种变化.例如,苏联要求从土耳其撤出美国的导弹,一个美方不予理睬的要求.此外,在支付矩阵中给定的似乎有理的结果可能根本不是完全"可信"的.为说明这至关重要的一点,考虑美国空袭和苏联撤出这个组合.虽然我们对这种组合已标以美国胜利,但完全可能出现以下的情况:苏联把空袭他们的导弹看成是威胁了他们的国家利益、因而这样的行动

组合很容易以一场核战争而告终，这给出了与空袭和维持这样的决策对同样的值．此外，即使苏联以撤出他们的导弹来应答封锁，如果封锁没有达到其目的的话，美国还会声称有可能要把冲突升级到至少一次空袭．这就暗示不能认为封锁的决策是最后的方法，即使在作出封锁决定后，美国认为仍然可利用其各种策略选择．

混合动机对策

胆小鬼对策是在合适的局势下双方局中人都可从合作中得益的一整类对策中最著名的对策．因为决定何时要合作和何时要竞争是一件微妙的事情，我们再用几页来描述几个这种类型的对策，以得到对这类局势中可能会提出合作优于竞争的感觉．

对胆小鬼对策的好莱坞和古巴导弹危机形式的考察都指明[30]不存在与另一个局中人的决定无关的对每个局中人都是最优的单个的行动步骤．这意味着，例如，肯尼迪和赫鲁晓夫这两人的利益既不是截然相反地对抗也不正好相同．这种对策常常称之为混合动机对策，它反映了局中人双方可能想要同样的结果的可能性，即，他们可能想要合作而不是竞争．

此外，古巴导弹危机不存在表示每个局中人的支配行动步骤的平衡点．对比一下看，具有下列支付矩阵的对策对于每个局中人都有支配策略 C：

		局中人Ⅱ	
		C	**D**
局中人Ⅰ	**C**	(4,4)	(2,3)
	D	(3,2)	(1,1)

当然，从策略的观点看这种对策是不感兴趣的，因为只审视明白事理的局中人应作些什么就清楚了．

结果表明只有四类重要的混合动机对策，其中的胆小鬼对策是这类对策的典型代表. 为了完整及随后的讨论起见，我们现在简要地描述其余三类"有兴趣"的混合动机对策. 为了前后一致及易于解释，我们将假定在这些对策中每个局中人有两个可能的行动. 我们把这两个行动标为"C"和"D". (为什么用 C, D 来标记的理由见后面的"囚徒两难策略"节.)

领 先 者

考虑两个司机试图从交叉路口的相对方向进入一个繁忙的交通流的情况. 当红绿灯在交叉路口亮起绿灯时，每个司机必须决定他是否把过路权让给另一位司机(C)，或驾车开过路口(D). 如果双方都相让，他们两人就都被耽误了，但是若他们双方都驾车开过去，那就可能相撞. 然而，如果一个开过来时另一人等一下，那么"领先者"将能够继续他或她的旅行，同时在红绿灯再成为红灯之前，"后者"仍能挤过领先者空出的豁口进入交通流. 这个领先者对策的典型支付矩阵是： [31]

		司机 II	
		C	D
司机 I	C	(2,2)	(3,4)
	D	(4,3)	(1,1)

我们再次看到这里没有支配策略. 按照我们现在熟悉的极小极大论证方法，为避开最坏可能的结果，每个司机应选择行动 C，因此保证了没有一个人将收到少于 2 个单位的支付. 然而，对于两个局中人的极小极大策略并不处于平衡状态，因为当每个司机看到另一个司机已经做的事之后，他或她都有理由为自己的选择感到懊悔. 这个简单的观察表明了极小极大原理不能作为混合动机对策中规定合理的行动步骤的基础.

事实上，结果表明在领先者对策中有两个平衡策略：在(C,D)对中，司机Ⅰ让了路，司机Ⅱ就驶入了路口，与之相反的就是(D,C)对.这些行动出现在支付矩阵的非对角线的角上.如果司机Ⅰ选择了行为D，第二个司机没有比选择C再好的了，反之亦然.换句话说，偏离了平衡结果没有一个人能做得更好.然而，与零和对策截然不同，在零和对策中这种平衡点总是等价的，但在领先者对策中司机Ⅰ喜爱(D,C)平衡点，同时司机Ⅱ喜爱(C,D)平衡点.没有调解这种差别的数学方法，这就是为什么现实世界的这类局势中，僵局常常是由以下事实来解决的，即平衡点之一比另一个平衡点更容易为司机觉察到.例如，文化及(或)心理因素可能用"先来，先服务"之类的默认为规则或者像用于指出平衡点之一的闪光之类的信号传送系统这样的方式来打破僵局.

顺便说一句，这类信号传送与零和对策中的局势形成了鲜明对比，在那里这种信号肯定不会是为了一个司机的利益，因为这种信号马上把有用的信息给了另一个司机.

性别之战

在这个对策中，一对已婚夫妇必须在他们的晚间娱乐活动的两种方案中作出选择.丈夫喜欢一类娱乐活动，例如说电影，[32] 而他的妻子则喜欢另一类娱乐活动，例如说出去吃匹萨饼.问题是他们愿意双双一起出去而不是单独出去.如果他们都选他们的首选(称之为行动C)，那么只好各走各的了，并且每人得到2个单位的支付.但如果他们每人都作出牺牲去参加他们不喜欢的活动(行动D)，双方都将受罪，他们每人只能得到1个单位的支付.但是如果一个人作出牺牲而另一个得到了他或她的首选，那么他们仍能一起出去，但作出牺牲的"英雄"得到3个单位的"奖赏"，而另一方则得到4个单位的收益.于是，这个对策的支

付矩阵就成为:

		妻子	
		C	D
丈夫	C	(2,2)	(4,3)
	D	(3,4)	(1,1)

性别之战和领先者有许多共同之点:(1)丈夫和妻子都没有支配策略,(2)极小极大策略交于非平衡的结果(C,C)处,以及(3)策略(C,D)和(D,C)都处于平衡状态.但是与领先者对策截然不同,在性别之战对策中,单方面背离极小极大策略的局中人将给另一个局中人的报酬要比给自己的多.这正好和领先者对策中碰到的情形相反,在那里背离者得到的收益要比其对手多.但是恰和领先者对策一样,这里的一个局中人也可以通过为获得某种程度对行动C的承诺而与另一个局中人的交流而得益.例如,丈夫可以宣布他已经不可改变地许诺了要去看电影,如果他的妻子为使她自己的收益极大的话,那么这种做法就对丈夫有利.仅有的困难在于要让她相信他是严肃的.这里要指出的要点是在性别之战对策中为使双方达到最佳可能的共享结果需要某种许诺.

囚徒两难对策

最后一个基本类型、也是迄今为止最令人感兴趣的混合策略就是被很好记载下来的涉及两个都被指控犯有某种罪行的囚徒的对策.两个都有向警方隐瞒情报(C)或泄露情报(D)的选择.如果他们都隐瞒情报(即,他们合作),他们将被无罪开释并且每人得到3个单位的支付.如果一个囚徒隐瞒了而另一个却向警方"告发"了,那么告发者得到4个单位的收益,而"殉难者"的支付只有1个单位,这反映了他或她所扮演的阻挠执法的角 [33]

色.最后,如果两个囚徒都讲出了情报,那么两人都将被判罪——但是较轻的罪——因此每人只得到 2 个单位的支付.囚徒两难对策的支付矩阵为:

		囚徒 II	
		C	D
囚徒 I	C	(3,3)	(1,4)
	D	(4,1)	(2,2)

(注:我们用符号 C 和 D 来表示所有这些混合动机策略中局中人的可能的行动是受启发于囚徒两难问题对策中对行动的惯常的说明.这里 C 表示与你的同犯"合作"(cooperating)并且拒不供认,而 D 表示向警方"叛逃"(defecting)并提供定罪所需的情报.这种解释应归功于普林斯顿大学的对策论学家 A·塔克尔(Albert Tucker),他紧接着兰德公司的 M·弗勒德(Merrill Flood)在 1951 年引进了这个两难问题后,在 50 年代后期杜撰了"囚徒两难对策"这个名称.)

囚徒两难对策是一个真正的悖论(似是而非的矛盾说法).极小极大策略交于互相背叛的选择处,这也是这个对策仅有的一个平衡点.所以两个囚徒中的每一个都没有理由为极小极大选择而懊悔,如果另一个囚徒也以极小极大对局的话.对两个囚徒来说,极小极大选择也是支配选择,因为当用其他的局中人的选择来对局时,每人从背叛得到的支付要大于从合作中得到的支付.因此,看来似乎是向警方叛逃的每个囚徒的最优支付——不管另一个囚徒决定做什么.但是如果两个囚徒都选择了这个别的合理行动步骤,那么他们每人得到的 2 个单位的支付是小于他们保持沉默而得到的 3 个单位的支付.

囚徒两难对策悖论的实质在于个体合理性和集体合理性之间的冲突.遵循个体合理性,对一个囚徒来说,背叛且向警方提供情报要更好一些.但是,似是而非相互矛盾的却是,如[34]果两个囚徒都成了"殉难者"并保持缄默,那么每人终将得到更好的支持.为确保两个局中人的这种更好的结果所需要做

的就是基于他们的共同利益的某种选择原则.也许最古老和最熟悉的这类原则就是孔子的为人准则"推己及人"了[1]但是要注意,在其他对策中这条为人准则可能是灾难性的.例如,如果在性别之战中夫妻双方都应用这条为人准则的话,那么结果将是最坏可能的结果,而且导致向他并不想要的各自出去进行娱乐活动.

迄今我们的考虑仅仅集中在人们可以称之为"一次性的"对策上,即这样的对象:在这种对策中局中人一劳永逸地作出单个选择,采取相应的行动,而且多多少少是不顾后果的.简言之,只有对策的单次对局.当然,生活中的许多对策正是这种类型的.但更多的对策却不是这样的.所以,对我们来说现在是时候来看看当我们面对的是可能有一系列对局,也许甚至是无限的对局的冲突局势时,事情将会发生变化的方式.而且只是为了看清确实变化了的事情,为此我们再来仔细考虑一下囚徒两难对策.

要证明两个局中人都背叛是平衡策略这一结论不仅适用于只有单次对局的对策,也适用于两个局中人都事先知道对局次数的具有有限次对局的策略是一个相当容易的习题.为证明这点,考虑一个有 N 次对局的对策.由先前的论证知道,如果对策只对局一次,那么两个局中人都应选择背叛.所以,对有 N 次对局的情形,他们在最后一次对局中应选择背叛,因为不要再对局了.但是,如果他们双方在第 N 次对局中都选择了背叛,那么他们面临的是一个有 $N-1$ 次对局的对策.应用同样的推理方法,双方都应在这个要对 $N-1$ 次局的对策的最后一次对局中选择

---

① 译注:或"己所欲,施于人".就是用自己的心意推想别人的心意.即要体谅别人.这是儒家的恕道.另一常用的成语是"己所不欲,勿施于人",即自己所不要的,不要施加到别人身上.语出《论语·颜渊》.参见《汉语成语词典》,上海教育出版社,1978年.

背叛.如此继续下去,显然一定会回到最开始的一次对局,一对背叛接着一对,接着又一对.因此,在这种局势下更能得益的选择 C 永远没有机会登场.

由我们马上就要考察的论证方法会知道,一旦我们允许有可以无限地连续进行的对策的可能性,合作就成为可能.这里"无限地"的意思当然是指:在该对策的任何一次对局后,局中人仍有机会再次相互作用;或者等价地说,局中人事先不知道对局[35]的次数.但是我们有点超前了,因为这些事情作为下面几节的内容更合适.所以,这里就不再啰嗦了,我们放下一次性对策转而来谈谈多阶段对策.

合作的出现

社会生物学推理①的基础是如下的断言:人类行为的模式,包括表面上看来是利他主义的无私行为,一般说来是从自私的行为中发展进化出来的.在囚徒两难对策的情形中,我们可以把这个社会生物学的论点翻译成如下的陈述:比起集体合理的合作选择,人们总是喜欢个别合理的背叛行为.于是问题就变成能使一群合作主义者能在一群利己者中获得立脚点的环境是否存在的问题.如果没有可能从一类开明的私己主义中发展进化出合作的行为,就很难支持社会生物学家的"自私基因"理论的论点了.

用进化对策论的术语来表达,总是背叛的策略就是所谓的**进化稳定策略**(evolutionary stable strategy,缩写为 ESS),因为偏离这种策略的局中人在与一群背叛者对抗中永远不能得手.或

① 译注:社会生物学是以进化论的观点研究动物的社会行为、种群的大小和组织功能(或适应意义)的习性学分支,1975 年出版的 E·Q·威尔逊的《社会生物学:新的综合》一书概括了这一研究领域的全貌.可参看《中国大百科全书》,《心理学》卷,316 页.

者他们能得手吗？不那么严酷无情的行动步骤最终能使自己在一群背叛者中立足的局势存在吗？这正是近年来最引人入胜的心理学实验中的一个实验，R·阿克塞尔罗德（Robert Axelrod）试图要回答的问题．阿克塞尔罗德要处理的不同的问题为：(a)在利己主义者的生活圈子里合作究竟是怎样出现的？(b)采用合作策略的个体能比不合作的竞争对手生存得更好吗？(c)哪些合作策略会表现得最好以及它们是怎样达到支配地位的？

阿克塞尔罗德利用对策论中众所周知的事实——对一个无限持续的囚徒两难对策存在许多平衡点——来开始他的实验．例如，尽管 ALL D，即总是背叛的策略，对于一串已知、固定、持续时间的囚徒两难对策相互作用来说是不可侵犯的，但若双方在事先都不知道相互作用的次数，则可能存在其他可供选择的 ESS 策略．用另一种方式来说，如果对完一轮囚徒两难对策后仍有可能要继续另一轮对策，那么就可能存在一个也是 ESS 的好的策略．这里我们说"好的"意思是指并非一开始就背叛的策略． [36]

为检验这种想法，阿克塞尔罗德邀请了一些心理学家、数学家、政治学家和计算机专家来参加一个使不同的策略互相竞争的一个计算机竞赛．竞赛的计划是由参赛者提供他或她认为是进行一串囚徒两难对策相互作用对局的策略，然后在一循环赛中让不同的策略互相竞争．14 位参赛者以计算机程序的形式提交了策略．竞赛的基本规则允许程序利用对策的以前的对局中的任何信息．而且，程序也不必是确定性的，允许用某种随机化的方法来作出他们的决定，如果局中人想这样做的话．唯一的要求是对每一轮对局程序必须得到一个确定的决策：合作(C)或背叛(D)．除了提交的策略外，阿克塞尔罗德还把策略 RANDOM 也加了进去，实际上，这是一个用抛掷硬币来作出合作或背叛的决策的方法．在竞赛中每个程序要与每个其他的程序（包括该程序自己）进行对局 200 次．为光滑化由于非确定性策略所用的随

机数生成带来的统计数字的波动,整个实验又进行了5次.

结果证明赢得策略是最简单的策略.这是由A·拉保泡特(Anatol Rapoport)提供的描述名为TIT FOR TAT(针锋相对)策略的只有三行的程序.它由两条规则组成:(1)对第一个合作者采取合作的策略,以及(2)在以后的各轮对局中,执行你的对手在前一轮中采用的策略.与那么多表面上看来要复杂和精细的进行囚徒两难对策对局的规则相比,这个简单而又直接的策略能占优势看来确实是不可思议的.这个竞赛的主要经验是为使一个策略能够成功,它必须既是好的又是宽恕的,即,它应该是既能开创合作又能回报以合作.在对这个竞赛进行详细分析后,阿克塞尔罗德决定举办第二次竞赛来察看第一次竞赛中学到的经验能否用于实践,甚至能开发一种比TIT FOR TAT更有效的合作策略.

作为第二次竞赛的前奏,阿克塞尔罗德把第一次竞赛所[37]有的信息和结果封装在一起并寄给各参赛者,要求他们提交修改后的策略.他还通过在计算机杂志上登广告来向局外人公开这个竞赛,以期吸引一些热衷于编程的人能从他们每天闲逛掉的日常事务中挤出时间来设计真正足智多谋的策略.阿克塞尔罗德总共收到来自世界各地的62份参赛程序,其中一份来自著名的进化论生物学家J·M·斯密(John Maynard Smith),他有一年在芝加哥大学学术休假期间为寻求对策论在生物学中的应用而发现了进化稳定策略.优胜者是谁?拉保泡特再次以TIT FOR TAT成为优胜者!所以即使对这个据称是更有说服力的场合来说,为人准则的拉保泡特对策理论的版本还是当然的赢家.从第二次竞赛中显露出来的一般经验是:不仅好而宽恕是重要的,而且一激就怒和可辨认这两者(的策略)也都是重要的,即,你应该对背叛者感到愤怒而且迅速予以以牙还牙但不是恶意的反击,而且你的行动应该是直接而明白无误的,要避免给人以太复杂的印象.

假设一种策略已经确定,它能在多好的程度上抵抗以不同的策略对局的某人的入侵的问题就提出来了.要证明一旦 TIT FOR TAT 在一个局中人团体中确立了,就不可能有任何能替代它的突变产生的策略是一件相当容易的事——只要未来的相互作用的可能性足够大.所以如果两个局中人再次面对面对局的概率足够大,又如果该团体的支配策略是 TIT FOR TAT,那么任何对这个策略的偏离都将导致突变产生的策略的失分.事实上,为使 TIT FOR TAT 成为一个 ESS,我们可以对未来的相互作用的这个概率应多大给出一个确切的值.

为此,我们考虑一般的囚徒两难对策的支付矩阵,现在我们只简单地称呼局中人 A 和局中人 B.用符号来记这个支付矩阵由下列给出:

		局中人 B	
		C	**D**
局中人 A	**C**	(R,R)	(S,T)
	D	(T,S)	(P,P)

其中支付 P,R,S 和 T 只是满足条件 $T>R>P>S$ 和 $R>(T+S)/2$ 的实数.第一个条件保证了支付将使个别的利己主义 [38] (ALL D)成为一个 ESS 策略,而第二条保证了如果局中人以某种方式不知怎么地锁进了合作和背叛的"不同步"的交替中时,那么比之于一开始就在每一局中采取互相合作的策略,每个局中人只会做得更差.顺便说一下,对支付所选的标记字母是为了反映本章先前讲过的这种囚徒两难对策的命名的故事.其中 P 是联合背叛的"惩罚"(punishment),R 是联合合作行为的"收益"(reward),S 是其对手背叛的合作者收到的"容易受骗的人的"(sucker's)支付.而 T 是其对手为合作者的背叛行为的"引诱"(temptation)支付.

对于本质上定义了囚徒两难对策的这个支付结构.TIT

FOR TAT 在重复对策中是一个 ESS 对策当且仅当两个局中人在将来碰到的概率 W 大于下列两个数：

$$(T-R)/(T-P), \quad (T-R)/(R-S)$$

的大者.让我们来看看这两个数试图告诉我们的是什么.第一个量只是难以相处从而要离开相对于难于相处而又被抓住不能离开的相对支付.第二个比是难以相处从而要离开所得到的支付的增量比之于好的而又没受骗所得到的支付的增量之比.遗憾的是,仅仅用词语是不足以确切描述为什么这两个数中的大者代表了使 TIT FOR TAT 不再构成一个 ESS 的截止点.我们要探究其数学的细节.但是仅仅在直观的基础上看,以下事实也是相当显然的:如果这两个数都很大,那么难以相处(背叛合作者)就有相对大的收益——因此,有诱惑力.所以在这种情况以 TIT FOR TAT 对局至少和以 ALL D 对局一样好,这表明一群背叛者不可能迫使 TIT FOR TAT 离开.

结果表明对于重复性囚徒两难对策来说,TIT FOR TAT 不是唯一的 ESS.例如,ALL D 就是另一个 ESS.所以 TIT FOR TAT 怎么能在一开始全是由背叛者的群体中开始的呢? 看来好像至少有两种不同的机制提供了 TIT FOR TAT 如何能"渗入"这样一个基本上是敌方的环境中去的似乎有理的途径.第一个就是**亲族关系的选择**,即帮助其亲戚.在囚徒两难对策中不背叛是一[39]种利他主义的行为,因为利他的个人是在可能取得的回报之前出现的.因此,如果两个局中人是被充分紧密地联系在一起的话,一种合作方式就会演化出来.事实上,用如下方式重新权衡支付矩阵:个人有其利益于伙伴的成功之中(即合情合理地计算支付)常常能逆转不等式 $T>R$ 和 $P>S$ 中的一个或两个.这时,合作就得到无条件的赞同.这就意味着合作的利益可为一群充分紧密地联系在一起的局中人得到.从而一旦出现了合作基因,选择将促成基于合作行为的策略.

聚类是第二种机制,通过它,合作能出现在一个本质上是

ALL D 的环境中.假设一小群个人正使用一种像 TIT FOR TAT 那样的策略,而且这个聚类中的有一定比例为 P 的成员与这个聚类中的其他成员相互作用.那么如果与该聚类中的成员对局构成占到了该群体其余部分的相互作用的不可忽视的比例,又若概率 P 以及未来的相互作用的可能性足够大的话,使用 TIT FOR TAT 的个人组成的聚类就能够独立发展——甚至是在压倒多数的局中人在碰到每一个遭遇者时都是背叛因而难以相处的环境中也是如此.我们顺便指出聚类常常是和亲族关系联结在一起的,而且这两种机制常常可以互相加强.但是即使在没有亲族关系的情况下聚类仍然可能是有效的.

真实世界,人为对策

兰德(RAND)公司数学部主任 J·威廉斯(John Williams)在 1954 年写道,对策论学家:

> 常常被专业的人类学者看成是智力早熟的儿童.他们不领会人类及其工作的真正的复杂性,天真烂漫地闲逛着,期盼着他们的玩具武器能杀死充满活力的飞龙就像它们能杀死无生命的飞龙一样容易.

而正是这些同样是人类中的一部分的"儿童"不仅有功于为一般的读者写出了一本读起来最有趣的介绍对策论的书而且更重要的是有功于为现在我们都知道的称之为策略的对策理论的整座大厦的支柱的大多数数学研究工作提供了最初的推动力以及智力(和财政的)支持.所以人们不禁要停下来问一问(想知道)对策论是否只是一种为使巡游的数学家得到雇佣而设计的一种没有意义的智力习题.或者确实有一些对人类真有价值的东西? [40]

我想大多数对策论学家在听到任何极其严肃地认为对策的理论确实能对实际的现实世界中的冲突提供了可操作的解决方

法的看法时都会感到高兴和意外.就试图缩小数学体系和现实间的差距而言,对策论的发展确实还不够完善,而且是建立在太理想化的假设之上.这确实是坏消息.好消息是:对策理论的思想和概念早就对实际局势的冲突的解决过程的实施提供了深刻而重要的洞察,我们在本章中已经考察过一些.

对策论的必要前提是如下的假设:局中人合理地行动,以一种本质上是无从区分是非的、自我服务的利己主义的方式作出决策.哲学家、伦理学家和志趣相投的其他人曾用合理性假设来暗示对策论描绘了一幅智力的图画,并认为人们都是追随他们认为是他或她的自身利益而行事的.当然,这些担扰是把理论中的"局中人"等同于不可靠的、古怪、失却理性的人了.所以,在这样的意义下,理论中抽象的局中人相似于现实世界中的决策者不会比牛顿力学中的质点相似于像地球或木星那样的椭球更好.但很难证明关于物理学中质点系的理想化与现实世界中关心的问题无关.对策论的情形亦是如此.

我们以一种鼓励的口气来结束我们对由冯·诺伊曼的极小极大定理开创的有关策略的领域的简短的漫游.极小化极大的理论是我们有的少数几个理论之一,它规定了在我们先前认为是不合理的局势中如何合理地前进.所以,如果对策论没有什么其他的好处,它至少以大刀阔斧的方法解决了哲学中的困难问题之一:在合理和不合理行动间的界限的问题.要从一种数学理论中得到比这些更多的东西是很难的.我们简要地把曾经由数值分析家 R·W·汉明(Richard W. Hamming)关于计算所作的注解的意思借用于此,"对策论的目的在于深刻的见解,而不是解[41] 法".

第2章 布劳威尔不动点定理(拓扑学)

针和干草堆

1993年11月13日圣母大学(Univ. of Notre Dame)的橄榄球队以31比24的比分击败了佛罗里达州立大学(Florida State Univ.)队登上了每周橄榄球队排名民意测验的第一名. 先于这次比赛,由精选的体育记者组成的美联社(AP)的民意测验以及由橄榄球教练组成的有线电视新闻网和今日美国(CNN/USA Today)的民意测验都把佛罗里达州立大学排在第一名的位置. 但在与圣母大学比赛后,佛罗里达大学队在美联社民意测验的排名降为第二,而在教练们的民意测验中则降至第三位,在内布拉斯加大学(Univ. of Nebraska)之后.

丝毫不奇怪,传媒的投票反映了一种希望,再看看佛罗里达大学队和圣母大学队能在元旦橄榄球赛季后的邀请赛中再赛一场的强烈愿望,不过这只有在佛罗里达大学队仍然保持在第二名的位置上才有可能(由于圣母大学队在紧挨的周末一次比赛中输给了勇气十足的波士顿学院(Boston College)队,而从未举行过这样的比赛). 这种由体育记者搞的明显的花招引起许多——特别是来自佛罗里达的——评论员和球迷的愤怒表示. 这里我们只是为了让人们知道各种民意测验排名的结果有多糟,看一下下面图2.1所展示的到1993年11月20日为止的1993年大学赛季的排名情况就知道了. 前四列分别表示美联社(AP)、有线电视新闻网/今日美国(CNN/USA Today)、纽约时报

(The New York Times)的民意测验以及今日美国的计算机民意测验排名,第五列是基于本章后面要讨论的思想由数学家 J·基纳(James Keener)作出的排名,最后一列是把未来的表现和以前的竞赛结果联系起来由统计学家作出的排名.

Team	Record	1	2	3	4	5	6
Florida State	10-1-0	1	2	1	1	1	1
Nebraska	10-0-0	2	1	2	4	6	11
Auburn	11-0-0	3	—	5	13	11	22
Notre Dame	10-1-0	4	4	9	3	4	4
West Virginia	10-0-0	5	3	7	12	9	19
Tennessee	8-1-1	6	5	4	2	2	2
Florida	9-1-0	7	6*	3	5	5	6
Texas A&M	9-1-0	8	6*	6	6	3	3
Miami (Fla.)	8-2-0	9	9	8	7	7	5
Wisconsin	8-1-1	10	8	16	22	8	21
Boston College	8-2-0	11	12	13	20	—	—
Ohio State	9-1-1	12	10	11	9	17	10
North Carolina	9-2-0	13	13	14	16	21	18
Penn State	8-2-0	14	11	15	18	13	8
U.C.L.A.	8-3-0	15	14	10	8	16	9
Oklahoma	8-2-0	16	15	12	19	15	13
Alabama	8-2-1	17	17	21	14	14	16
Colorado	7-3-1	18	18	18	17	25	25
Arizona	8-2-0	19	16	25*	21	20	15
Kansas State	8-2-1	20	19	24	—	—	—
Indiana	8-3-0	21	21	—	—	18	20
Virginia Tech	8-3-0	22	20	19	25	—	—
Michigan	7-4-0	23	22	17	10	10	7
Clemson	8-3-0	24	23	—	—	—	—
Michigan State	6-3-0	25	24	25*	—	—	—
Southern California	7-5-0	—	25	23	15	24	12

图 2.1 (到 11 月 20 日为止)1993 赛季橄榄球赛排名

就像班珂①的幽灵,这种令人沮丧的局面,即看来与橄榄球队自身固有的长处没有联系的那些因素在影响着球队的排名,似乎困扰着每年秋天的大学橄榄球赛的活动.作为一种从另一角度考虑问题的反应,一些着迷的数学家、统计学家和球迷试图

① 译注:Banquo,莎士比亚悲剧《麦克佩斯》中的人物,被麦克佩斯下令杀死,后以鬼魂显灵,使麦克佩斯暴露自己的罪行.

策划一种对测定橄榄球队的实力的棘手问题的数学回答 我们要概述这些排名方案的一般想法，并展示了与本章要讨论的问题的直接联系.

最直接的排名方法就是在一个队和其他队比赛情况的基础上对 N 个队中的每一个队指定数值排名. 排名应以该队的比赛结果也要以对手的实力为基础. 假设 r_1 表示队 1 的排名. 为说明方便起见，例如说 r_1 是 0 和 100 间的某个数. 量 r_1 可以想象为 0 [45] 和 100 间的实数区间中的一个点. 若 r_2 表示队 2 的排名，则我们可以把排名对(r_1, r_2)表为边长为 100 的正方形中的一个点. 但是我们有 N 个队，所以把它们的排名排列为一个向量

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix},$$

其中数 r_j 正好是队 j 的排名. 这是在有 n 条边、边长为 100 的一个正方形中的一个点. 所以完全排名向量 r 属于由这些难于看见——但数学上容易写出来——的点所构成的空间——"超正方形".

测定队 i 的实力的一种办法就是简单地把已经赛过的该队和其他队比赛结果加起来. 这就导致了下面的公式 [46]

$$r_i = (a_{i1}r_1 + a_{i2}r_2 + \cdots + a_{iN}r_N)/n_i, i = 1, 2, \cdots, N, \qquad (*)$$

其中数 a_{ij}是一个基于队 i 和队 j 比赛结果的非负数，从而使这样构造出来多少可测定在该场比赛中两队的相对实力. (*)式右边的分母表示队 i 已经赛过的场次，这样做是为了避免只是以赛的场次多而累积起很大的得分. 一种貌似有理的——但并非很有用的——指定 a_{ij}的方法如下：若队 i 赢了队 j，则 a_{ij}取为 1；若打平，则为$\frac{1}{2}$；若队 i 输给队 j，则 a_{ij} 为 0. 我们将在本章末回到怎样最好地选择 a_{ij}的问题上来.

不管人们怎样定义量 a_{ij}，以下假设并不过分，即上面的（*）式给出的队 i 的排名正好与其实力成正比．这毕竟是假设要去测定的一个队的排名．为简化我们的记号，我们把数 $\alpha_{ij}=a_{ij}/n_i$ 定义为矩阵 A 的 i 行 j 列处的元素，所以：

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1N}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \cdots & \alpha_{NN}\end{pmatrix},$$

于是由矩阵的乘法规则有：

$$A_r=\begin{pmatrix}(a_{11}r_1+a_{12}r_2+\cdots+a_{1N}r_N)/n_1\\ (a_{21}r_1+a_{22}r_2+\cdots+a_{2N}r_N)/n_2\\ \vdots\\ (a_{N1}r_1+a_{N2}r_2+\cdots+a_{NN}r_N)/n_N\end{pmatrix}.$$

但这正好就是（*）式，这就意味着我们可以把（*）式更紧凑地写作 $r=Ar$．所以我们要求的排名向量只是向量超正方形中这样的点，即，当用矩阵乘以该向量时保持不变；这就是所谓的 A 的不动点．这是一种看待这种局势的略为代数一点的方式．

假设在赛季刚开始还没有进行比赛时，我们有了一个表示各队相对实力估计的排名向量．这个排名可能是来自体育记者、[47] 球迷、教练或不管什么样的人的意见．现在，在第一周赛过后，这个排名向量就改变了．按照规则：

$$r^{(1)}=Ar^{(0)}$$

转换成为超正方形中的一个新的向量 $r^{(1)}$．因此 $r^{(1)}$是第 1 周后的排名．类似地，第 2 周比赛完后的排名向量是：

$$r^{(2)}=Ar^{(1)}=A(Ar^{(0)}),$$

等等．这样我们就看到每周排名向量从排名超正方形中的一个点变动到另一个点．

现假设在第 5 周碰巧发生了第 5 周的排名向量和第 4 周的

排名向量是同样的. 这就意味着:

$$r^{(5)} = Ar^{(4)} = r^{(4)}. \qquad (*)$$

现在我们来考虑第 6 周的排名形势. 根据定义我们有:

$$r^{(6)} = Ar^{(5)} = A(Ar^{(4)}) = r^{(5)}.$$

因此,如果排名向量在相邻的两周中保持不变,那么在以后各周就将呆在该点不动. 所以,为得到最新排名的一周接一周的在我们的超正方形中动点的过程就会慢慢地停下来. 在这种情形,由这种方法得到的"最后的"排名只是在变换 A 下保持不动(不变)的超正方形中的一个点而已.

我们将在后面回到这种不动点的实际确定的问题. 眼下,只要注意到以下这点就够了:为解决这个非常现实的(尽管不可否认地这不是极其重大的)橄榄球队排名的问题最终可归结为方程求解的问题,我们要求一个向量使得 $r = Ar$,或者同样的事,我们要求方程 $r - Ar = 0$ 的解.

不动点理论是我们的数学宝库中能告诉我们对于一个给定的方程是否有特定类型的解的最一般的工具. 例如,我们后面将看到从地球到月球的所有路径组成的集合是由元素("点")为曲线的某个空间. 这时,我们想知道在该空间中是否存在一个点,即一条路径,使得能以固定的能量消耗从曲线的一端到另一端. 回答这个问题的通常的方法是猜测这样一条路径,然后逐次地变换这种猜测,直到我们找到一条变换后的曲线与变换前的曲线是一样的时候为止. 即,直到在变换过程中当前的曲线保持不变为止,恰如刚刚考虑过的橄榄球队排名问题中在变换 A 下向量 $r^{(5)}$ 保持不变一样. 这样一条最终的曲线就是变换的一个不动点,而且在适当的条件下就是原先的最小能量问题的解.

[48]

遗憾的是,我们将在本章中讨论的大多数经典理论并不告诉我们怎样实际地去求不动点. 但是如果要你在干草堆中去找一根针的话,最好是在你用干草叉叉起干草开始仔细寻找之前能知道在干草堆中确实有一根针. 这就是布劳威尔不动点定理

打算回答的解的存在性问题.现在让我们来谈一下曲面和空间.之后我们将回来讨论这些考虑是怎样和方程的求解有关的.

乍一看,人们会认为决定方程解的存在性问题和决定,例如说,为什么像美国的橄榄球那样的几何空间是不同于像面包圈那样的空间的问题之间没有什么要紧的联系.但是拓扑学常常能为你找到看似无关的事物间的出人意料的关系.

空间的形状

据说在古希腊的柏拉图学园①的入口处的上方刻有如下的格言:"从这里进去的人无人不晓几何学."而且直到现在,大多数人看来都发现几何学是数学的三个主要组成部分——代数、几何和分析——中最协调的,可能是因为几何学是最看得见的从而是最容易效仿的.概括性地讲,几何学是研究对象的空间性质的.我们都熟悉日常生活中某些这样的对象,例如,像一张纸上的一条直线或者是气球表面上的一个圆那样的对象.像花瓶和你的鞋带打的结这样的简单对象也是常见的几何对象的例[49]子.由于几何学是空间的数学抽象,所以采用维数来使其研究条理化是一种自然的方法.首先我们有点,零维的对象.然后是直线和曲线,它们是一维的对象,接着是二维的曲面等等.来自给定维数的一组这样的对象构成了数学上所谓的一个"空间".又若存在某种概念能使我们说清楚什么时候这样的空间中的两个对象是"靠近"的话,那么这个空间就称为拓扑空间.

数学空间以许多不同的——有时是相当异乎寻常的——特点形成,空间中的"点"可能是像复数,无穷次可微的函数,甚至是更为复杂的数学设计物那样的事物.这正是抽象起作用的力量所在.抽象思维给予任何其他数学领域的可观的回报都小于抽象思

① 译注:成立于公元前 387 年左右,为柏拉图讲学的地方.

维给予拓扑学——即几何对象在不撕裂、切断或打碎的前提下在连续变形或扭曲下保持不变的那样一些性质的研究——的回报.从图 2.2 可看到一个这种拓扑变形的一个很好的例子,该图向我们展示了怎样能经由把杯子的顶边和底面压到一起,从而把咖啡杯中的咖啡挤出来,而把咖啡杯连续地变换成面包圈的形状.

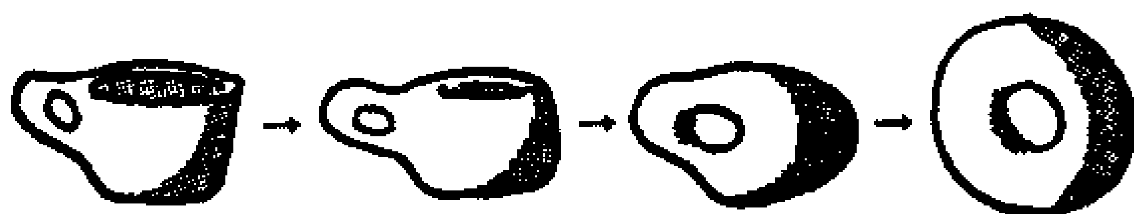


图 2.2 把咖啡杯拓扑地变换成面包圈

通常,当我们讲到几何学的时候我们心里都有属于某个空间的一组对象,或"形状",并伴有这些形状的各种几何性质以及(或者)它们之间的各种关系.最好的例子就是我们大家在中学中费劲学习过的简朴古老的欧氏平面几何,我们尽自己的最大努力挑选出像直线、圆周、梯形以及所有其他简单形状的性质中的某些逻辑上无懈可击的奥秘.一个这样的奥秘,例如说,就是以下熟知的事实,三角形三内角之和等于 180°.但是我们也知道这些奥秘有赖于对象"居住"的基本区域.例如说,欧氏对象生活在平坦的 [50] 二维平面(如果你愿意想象的话,就是一张纸)上的日常生活的领域中.但如若把我们的直线、梯形和圆周看作是居住在另一个很不一样的区域(例如说球的表面)上的话,那么我们将得到,诸如三角形三个内角之和总是大于 180°这样的极不相同的一组性质.所以对象所嵌入的基本空间可能会影响到对象的几何性质.

整个 19 世纪中期,引进并研究了许多不同的几何学——欧氏、非欧、解析、仿射、投影几何学,等等.但是直到 F·克莱因[1]

[1] 译注:Christian Felix Klein,1849.4.25 ~ 1925.6.22,德国数学家.1872 年,在他就任埃尔朗根大学教授时,以《关于近世研究的比较考察》为题发表就职演说,这就是著名的《埃尔朗根纲领》.

于 1872 年发表了他的著名的《埃尔朗根纲领》才最终筹划出了使几何学系统化的协调一致的框架. 克莱因研究几何学的纲领基于下列关键思想:把一种几何和另一种几何区分开来的是研究对象在遵从特定类型的变换下是如何表现的. 克莱因看出了在这个研究纲领中决定性的要素是揭示这些在给定的一组变换下对象保持固定——或者说不变——的命题.

例如,欧氏几何是由以下性质和其他几何区别开来的,即平面上的例如圆周和三角形那样的对象在刚体运动——旋转确定的角度,平移到平面上一个新的位置,以及(或者)关于一条固定直线的反射——下保持不变. 不像前面讨论过的咖啡杯变化中的连续变形,这些是不会使对象发生变形或"翘曲"的变换. 因为诸如三角形的角以及圆面积等的性质最终都化归为直线在刚体运动的变换下平面上直线段长度的不变性,把欧氏几何从所有其他的几何区分开来的是在下述变换下,即如果我们经由把对象挑出来,移动到一个新的位置,旋转一下或者关于固定的直线的反射——但不以任何方式挠曲、伸缩或者变形对象的变换下保持不变的命题.

所有刚体运动的集合构成了数学家所谓的变换群,而克莱因的《埃尔朗根纲领》把几何学的每个分支看作是讨论在一种特定的这样的群下保持不变的几何对象的这些性质的学科. 克莱因试图证明的是,给予一种几何以"个性"的变换群,不是对象本[51]身,从而我们应该集中注意力于在某种群的基本性质下对象是怎样变换的而不是注目于对象本身.

我们在本章中的主要目的之一就是要追随克莱因的宣言——但只在曲面的范围内. 所以我们从两张曲面开始并提问:能否把两张曲面中的一张连续形变为另一张? 即这两个空间是拓扑等价的吗? 对像篮球那样很圆的球面进行计算毕竟要比对像英式橄榄球那样奇怪形状的对象的计算要容易得多. 但是如果你知道怎样用某种变换群把篮球变换成英式橄榄球,那么,你

就可以只对球面的情形计算，并把最后的结果变换回英式橄榄球的情形. 正是两个空间——篮球和英式橄榄球——的拓扑等价性使得这样的做法成为可能. 而且正是拓扑学告诉我们何时两个看似不同的对象，或空间，实际上能把一个变换成另一个.

从前面的论述我们知道如果两张曲面是由咖啡杯和面包圈形成的话，那么我们的提问的答案是肯定的，这两张曲面是拓扑等价的曲面. 但是我们要追求更大的目标. 我们需要能对一切曲面对回答该问题的一般理论. 研究这样一种理论需要寻求在曲面的任何连续变换下保持不变的曲面的性质. 如果一个曲面的这些性质的数值和另一个曲面的数值是相同的，那么这两个曲面可能是等价的，即可以连续地把一个变换成另一个. 但如果对两个曲面来说即使是有一个这样的性质的数值不同，那么，它们肯定是不等价的. 所以我们要问为决定何时两个曲面是等价的问题需要什么样的性质以及多少这样的性质.

我们将会看到，对大多数曲面来说有可能彻底回答这些问题. 但对于高维空间来说事情就变得远为难以捉摸了，即使是我们只是从曲面转向通常的三维空间. 这就是为什么本章大部分只限于讨论曲面（除了这时我们能画出很好的图形外）的原因. 但是这和变换的不动点又有什么关系呢？

假定代替两个曲面，X 和 Y，我们考虑的是两个高维的拓扑空间 X 和 Y. 而且只考虑 $X = Y$ 的特殊情形. 所以我们考虑的是一个空间到其自身的连续变换. 现在我们可以问一个类似的问 52 题：在所有这样的变换下保持不变的东西，如果有的话，是什么？这就是不动点要登场的地方了，因为可能没有任何点会保持不动. 例如，考虑圆周转动一个确定的角度. 这时，在转动下每个点都移动到另一个位置上去了；因此，没有不动点. 所以存在不动点的问题就变成决定为确保在每个空间自身到自身的连续（即拓扑）映射下至少有一个该空间的点保持不变的空间 X 必须具有的性质的问题.

如果一个空间在某类变换下有不动点，那么数学上就对它有兴趣.但是如若它没有不动点，那么数学上对它也有兴趣.实际上，这两个问题同样是有兴趣和重要的.如橄榄球队的排名和登月的例子所表明的，许多问题的可能解的集合可以看作某个抽象的数学空间中的点.而这些点中是否存在一点真是所考虑问题的解，几乎总可表述为关于该空间在特定类型的变换下该空间是否存在不动点的问题.而空间的连续变换是非常一般的变换，这种变换允许只要不把空间"撕裂"成碎片的任何类型的变形.这种一般性就使我们能把在生物学、经济学、物理学和工程中提出的有关方程解的存在性的许多问题表述为不动点的问题.本章后半部分的大部分专门用来说明怎样表述为不动点问题.

所以我们找到了空间(例如，曲面)分类的问题和方程求解(即求不动点)之间共有的环节就是空间 X 的连续变换的概念.一种情形是，X 被连续地映射到一个可能不同的空间 Y；另一种情形是，X 被映射到自身.但是在两种情形下我们要回答的问题的本质是相同的.我们要求该空间在连续变化下保持不变的一个点或一条性质，然后用该条性质或点来决定(1)空间 X 和 Y 是否是拓扑等价的，或(2)空间 X 是否有一个不动点.求这些不变的性质或点正是拓扑学能起作用的很大一部分.[53]

拓 扑 学

好了，现在我们知道拓扑学就是研究几何对象在经受了连续变换后保持不变的那些性质的.很好.所以不把我们的变换限于定义我们称之为欧氏几何的性质的刚体运动，现在我们允许对象的任何变换或映射，只要求开始时靠近的两点变换后仍是靠近的.我们不想允许空间的任何连续变换，而只允许那样一些连续变换，它使得变换后的空间的任何一点对应到而且只对应

到原空间的一点，反之亦然．换言之，我们考虑的变换是连续的，具有连续的逆变换，而且是"映上"的，意即目标空间中的任一点对应于变换的源空间中的某一点．用数学术语来说，这种变换称为同胚．所以撕裂和打碎的变换是不允许的，但弯曲和伸展的变换是可以接受的．

拓扑学中允许的变换的类型是如此的一般致使当我们从所有可能的连续变换中选取变换来变形对象时只有对象的最基本的性质才能保持不变．为此，拓扑学常常被称为"橡皮片几何学"．这反映了下面的思想，即我们可以在像气球的表面或外科医生的手套那样的东西上画各种东西，当我们用伸展、紧缩或其他方法连续变形橡皮片时保持不变的仅有的对象的性质就是我们称之为拓扑性质的那些性质．

我想拓扑性质与我们熟悉的欧氏几何中的不变性质是很不相同的这一点是显然的．例如，象征三角形的性质不是拓扑性质，因为我们可以把三角形连续地变形为圆周．类似地象征橄榄球的性质也不是拓扑性质，因为我们可以把橄榄球连续地挤压成棒球，或者也可连续变形为足球．

那么什么样的性质是拓扑性质呢？有洞就是这样一种拓扑性质．例如，虽然面包圈可以连续地变形为咖啡杯，但不可能把它扭曲并塑造成一只没有洞的棒球．有边（即，边界）是另一条拓扑性质．例如，圆周是没有边的，而直线段有边（它的两个端点）．无法把圆周连续地变形为直线段，因为任何这样的变换都将把直线段的两个端点映到圆周上的同一个点，从而破坏了变换是一一对应的要求．换言之，为把圆周映成直线段我们必须断开圆周．

54

就数学内部和外部的许多应用而言，知道什么类型的几何对象可以互相连续变形是极为重要的．因为像三角形、圆周和球面这样的一类标准的几何对象是容易从数学上进行研究和计算的，而像橄榄球那样的几何对象情况就不是这样了．所以如果我们有一个可以支配的把像橄榄球那样的"困难的"空间连续地变

形为像球面那样"容易的"空间的变换,那么我们在球面上进行各种数学研究,然后就可以利用这个已知的变换把这些研究结果转换成橄榄球上的结果.所以为简化我们的数学研究活动,我们想知道能连续变形到,例如说,球面的所有对象.然后,我们把所有这样的对象归并成一类,称为"SPHERES"(球面),从而只要研究一个"标准的"球面就能一下子研究了该集合中任何元素的性质.集合"SPHERES"就是所谓的等价类,而(看上去像篮球的)标准球面称为类"SPHERES"的典型代表.因为,根据定义,类"SPHERES"中任何两个对象可以经由一个拓扑(即,连续)变换把其中一个变形为另一个,所以我们称它们是拓扑等价的.让我们进一步深入考察一下这个概念.

拓 扑 等 价

为简单起见,我们只限于讨论有界曲面那样的拓扑空间.粗略地讲,曲面就是任何局部看起来就像是普通的二维平面的拓扑空间.这意味着在这样的空间中走动的一只蚂蚁是看不到该空间的总体的扭曲和转动的,而是认为它是生活在一张平坦的纸那样的空间中,就如同我们人类会认为我们是生活在一个平坦的平面上那样,直到我们登上像协和式飞机或宇宙飞船那样飞得很高的[55] 飞行器并实际上看到地球的弯曲时才会发现情况并不那样.

像球面那样的一些曲面是有界的,而像平面 R^2 那样的另一些曲面就不是有界的,你可以在球面上走动而永远不可能离开球面,就像我们中的大多数人一生都是在地球表面上走动一样.此外,像平面上的圆盘那样的一些曲面具有边界,而像球面那样的另一些曲面则根本没有边界.这意味着对圆盘来说有一条曲线把它的点"围了起来",如果你跨过了这条曲线你就可以离开这个曲面.这样一条曲线称为曲面的边界.球面上就没有这样一条曲线;如果你穿过球面上任何一条闭曲线,你仍然在球面上.所以球面是有界的、闭的,

但没有边界.无边的连通曲面(全部在一片上的那些曲面)称为闭曲面.所以球面是闭曲面而圆盘不是闭曲面.

图 2.3 展示了一组曲面,其中有一些是拓扑等价的.例如,我们已经知道有可能把数学上称为环面的面包圈形状的对象通过抓住环面的一部分使劲地拉的方式连续地变形为有一个环柄的球面.三叶形管也拓扑等价于环面,从而拓扑等价于有一个环柄的球面就不那么显而易见了——不过确实如此.顺便说一下,有三个环柄的球面说明了曲面被扭曲或打结的方式并不是曲面自身的内蕴拓扑性质,而是有赖于曲面是怎样被嵌入到周围的

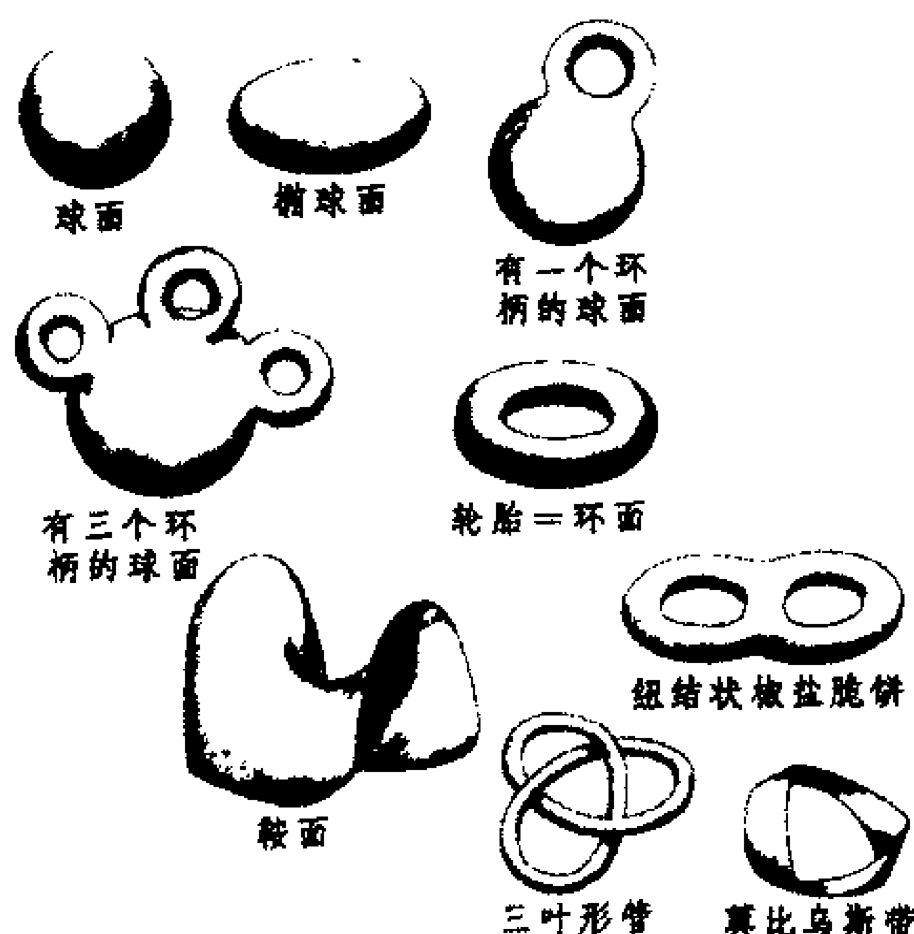


图 2.3 一些曲面

空间中的.所以如果你是生活在有三个环柄的球面上的一只二维的蟑螂,那么你就不可能说你不曾生活在环面上.你必须跳出你那个扭曲的、折过的有三个环柄的球面的世界才能发现,这是打了结的.打了结的("顽皮的"?)不是在拓扑变换下保持不变的性质.但有洞("神圣的"?)却是在拓扑变换下保持不变的性质.

拓扑学的一个主要目的就是试图对所有的拓扑空间进行分类.就闭曲面而言,分类问题归结为提供一张闭曲面的表使得每个闭曲面都能被连续地变形为这张表中的一个而且只有一个曲面.对于这样的闭曲面实际上可以显式地给出这样的一张表,而且结果证明这还是一张很短的表.事实上,这张表只包括两类基本不同类型的闭曲面:有环柄的球面和带有所谓的交叉套的球面,我们马上就要来给出其定义.任何其他的闭曲面都可以连续地变形为这两类曲面中的一类.但是为了证明这点,我们首先要[56]在我们这个拓扑学的炖锅里搅拌进稍多一点的数学成分.

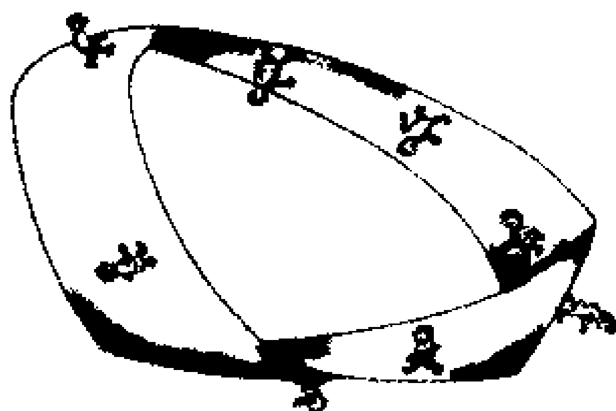


图 2.4 在莫比乌斯带上绕行一圈

我们来考虑一下在所有的曲面中也许是记述得最好的,即使不是最重要的曲面,即"莫比乌斯[1]带".这个小玩意儿可用以下方式做成,取一条纸带,扭转纸的一端一半并和另一端粘贴在

[1] 译注:Agustus Ferdinand Möbius, 1790.11.17 ~ 1868.9.26,德国数学家.

一起.结果得到有一条边的开曲面,而不是无边的闭曲面.如果你能在莫比乌斯带上行走,整个走一圈时看起来就如图 2.4 所示的那样.够令人惊讶的,不像在球面上绕行一圈正好回到你出发的地点,就好像什么事也没发生过似的.而莫比乌斯男人或女人却并不回到他或她的绕行出发点的同样的指向.绕行一圈却 [57] 把莫比乌斯人变换到他或她自己的相反的指向,即他或她"颠倒地"回到原地.具有这种性质的曲面称为不可定向的曲面,因为不可能相容地定义曲面的左侧和右侧.另一方面,像球面那样的曲面是可定向的,因为如果你沿着——例如说一个大圆——走的话你回到原地且指向相同.

现在回到对所有的闭曲面进行分类的问题,结果证明:所有闭可定向曲面可以连续变形到一个具有确定个数环柄的球面.环柄的个数 g 称为曲面的亏格.所以,例如说,球面拓扑等价于没有环柄的球面.环面可变形为我们早就知道的有一个环柄的球面,而图 2.3 说明纽结状椒盐脆饼可塑造为有两个环柄的球面.等等.因此,从拓扑学的观点看我们需要关心的仅有的可定向曲面就是具有环柄的球面.但是关于不可定向曲面又会怎样呢?

几何上讲,不可定向闭曲面的情形只是比可定向闭曲面的情形稍为晦涩难懂一点.为了解这类曲面的典型代表是什么,我们需要引进一个新的概念.取一张曲面并在上面切出一个洞.这个洞是一条单个的圆周形的边.莫比乌斯条也有一条单个的圆周形的边.所以我们可以把洞的边和莫比乌斯带边对边地缝在一起,如图 2.5 所示.如果允许莫比乌斯带可以自交的话,这只能在三维的情形看得见;数学上,没有这样的自交.缝上莫比乌斯带后得到的曲面称为交叉套.因为讲述这样的曲面的细节和性质将使我们离题太远,我们 [58] 建议有兴趣的读者参阅书后文献目录中列出的文献以了解更多的信息.这里只要说清以下事实就足够了,即交叉套是拓扑等价于莫比乌斯带的;因此,交叉套是不可定向的.可以证明任何不可定向的闭曲面拓扑等价于具有确定个数 $g \geqslant 1$ 交叉套的球面.和可定向曲

面的情形一样，g 称为曲面的亏格.

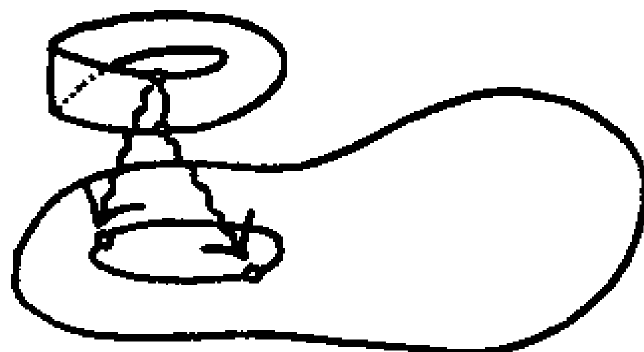


图 2.5　交叉套

现在我们把刚刚学到的关于闭曲面的拓扑等价性的知识总结在下列基本结果中.

关于闭曲面的分类定理

a. 每个可定向的闭曲面拓扑等价于一个具有确定个数($g \geqslant 0$)环柄的球面.

b. 每个不可定向的闭曲面拓扑等价于一个具有确定个数($g \geqslant 1$)交叉套的球面.

上面的考虑导致了多多少少令人欣慰的结论，任何其他闭曲面都与之拓扑等价的标准曲面表只包含具有环柄的球面(对可定向的曲面)或者具有交叉套的球面(对不可定向的曲面). 不幸的是，当我们转向更高维的拓扑空间时，情形很快变得更为复杂. 不过，总的计划是一样的：生产出一张关于所要求的维数的"标准"的拓扑空间的表，使得任何同样维数的拓扑空间可以连续变形到这张表中的恰好一个元素. 具有环面或交叉套的球面穷尽了标准闭曲面的表；在高[59] 维的情形，与只是具有环柄或交叉套的球面的高维类似物更复杂的对象的有关分类相比只有部分的分类结果可以利用.

反应敏锐的读者可能会想到试着去构造一个既有环柄又有交叉套的曲面. 这是可以做到的，例如，在球面上切出三个洞，把

一段圆柱面的两端和两个洞粘贴在一起,再把一条莫比乌斯带缝到第三个洞上去.这些操作似乎生成了一个既是可定向的(因为它有一个环柄)又是不可定向的(因为它有一个三叉套)曲面.那么它究竟是哪种曲面呢?

为解决这个难题,这里有一个说明你所得到的是一个具有三个交叉套的不可定向曲面的简短的论证,它是由C·泽曼(Christopher Zeeman)用I·斯图尔特(Ian Stewart)的方法给出的.把环面设想为一个柄附着在球面上.缩小附着在球面上的两个圆盘中的一个.然后沿莫比乌斯带迁移,为了逆转其定向,接着又返回原来的位置.现在环面变成一个内缝的克莱因瓶,它是由两个莫比乌斯带沿其边缘缝在一起构成的.因此得到的曲面具有三个内缝的莫比乌斯带;两个形成该克莱因瓶,再加上原先内缝形成交叉套的一个莫比乌斯带.

这个小练习展示的只是曲面上一小块非定向部分使得整个曲面成为非定向曲面.定向性基本上是一种整体性质.原先的具有一个柄和一个交叉套的曲面只是看起来在一个大的子集上是"局部可定向的".但是在拓扑学中,"大"是没有意义的,我们可以很容易变形该曲面使之有一个"大"的莫比乌斯带和一个"极小的"环面.

只是为了了解当只是提高一个单个的维数时棘手的事情会变得怎样更加棘手,我们来简要地考虑一下著名的庞加莱[①]猜想这个为时甚久的断言与所谓的单连通、闭三维流形有关.这只是对空间的数学行话,该空间的每点附近看起来像通常的三维空间,而又没有"边",意即没有二维的边界.最后,"单连通"的意

---

① 译注:Jules Henri Poincaré,1854.4.29～1912.7.17,法国数学家、数学物理学家、理论天文学家、哲学家.被公认为是19世纪进入20世纪时最伟大的数学家,对天体演化学、相对论和拓扑学的现代概念有深远的影响.

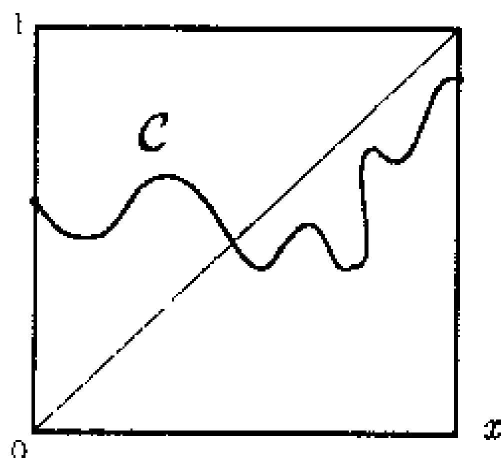
思是指流形是整个的一块而不是三维空间中分离开的“块”的并集. 庞加莱猜想断言:每个单连通闭三维流形等价于三维球面.

[60]

庞加莱猜想的肯定的解决将导致闭三维流形的完全分类,它类似于我们对闭二维流形,即闭曲面,的完全分类. 但是尽管许多人试图证明这个看似简单的命题,但迄今它仍是最大的数学中尚未解决的问题之一. 十分有趣的是,对所有维数不等于3的情形该猜想都已获解决. 所以,三维空间看起来有点像介于“冷”维数1和2(在那里没有什么余地可以出错)和大于3的“热”维数(在完全分类的道路上有足够的障碍有待克服)之间的金发状毛茛粥. 所以三维空间是不太热又不太冷的空间,恰好使庞加莱猜想成为迄今尚未解决的公开问题.

不动点游戏

我们来玩一个由图2.6所示的简单的只用到纸和笔的游戏. 规则如下:首先在垂直线段 $x=0$ 和 $x=1$ 的每一条上任画一点. 然后用你的笔不离开纸地画一条连接该两点的决不能碰到划分该正方形对角线的曲线. 不用做太多的实验就会知道这是个没有多大意义的游戏,因为没有赢的策略. 每一条连接该两点的连续曲线必定会碰到对角线上至少一点. 以下就是理由.



[61]

图2.6 不动点游戏

任何从垂直线 $x=0$ 出发在垂直线 $x=1$ 终止的连续曲线可以看作是单位区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 到自身的一个变换，因为它把该区间上每一点和该曲线 $C(x)$ 上的也位于 0 和 1 之间的另一点相联系. 对角线对应于在该变换下把点映到自身的点的集合. 因此，任何点 x 被映射到对角线上一点就是该映射 C 的一个不动点. 换言之，这是一个使 $C(x)=x$ 的点. 根据起初应归功于荷兰数学家布劳威尔的论证，证明了每一条把单位区间映射到自身的这样的曲线一定至少有一个不动点. 所以在不动点游戏中是无法赢的.

因为刚刚给出的关于在不动点游戏中你永远没有希望赢的不可能的论证对所有把单位区间映到自身的变换都成立，所以具有不动点的这个性质实际上更像是构成单位区间的点集的性质而不是特定的变换 C 的特征. 这一观察结果引导我们去问：像单位区间这样的具有这种“不动点性质”的集合是什么呢？关于这个问题的答案将使我们能事先告知是否一个给定的空间在把它自身映到自身的连续变换下有一个不动点. 而且，这样的知识结合着有关什么样的空间是等价于什么样的另外的空间的信息会使我们很自信地说明方程何时有解以及何时无解——而不必真正显式地拿出解来. 在我们投入时间、精力和金钱试图去寻找之前就知道针确实在干草堆中. 为我们自己提供这种数学武器就是本章的主题.

解 方 程

迄今，我们把注意力集中于决定何时两个空间(即，几何对象的集合)是同一的、至少就其拓扑性质而言是同一的问题上，遵循 F·克莱因的埃尔朗根纲领的步骤，我们通过试图揭示在一组特定的变换(所有空间的连续变换的集合)下保持不变的对象的那些性质来探讨该问题. 但是就我们在前面看到的，还有另一

[62] 类在数学中也极具重要性的不变性问题，它涉及决定一个给定的方程（例如橄榄球队的排名向量的方程）是否有解的问题．我们现在要来说明这个一般性的问题怎样能数学地化归为决定把一个拓扑空间映到自身的一个给定的连续变换是否有不动点的问题．所以我们把曲面论先搁置在一边，把本章的其余部分专门用来讨论这一主要的问题．

在讨论前面的不动点游戏时，我们关心的是求变换 $C(x)$ 的不动点．然而，结果表明和求方程 $G(x)=0$ 的解是一回事．为证明这点，把函数 $G(x)$ 定义为 $G(x)=C(x)-x$．我们还从反向论证之．假设我们要求解 $G(x)=0$．那么我们引入恒等算子 I，其效应等于什么也不做，即对每点 x 有 $I(x)=x$．我们可以从这个算子减去 G 得一新的变换 $H=I-G$．原来的方程则变形为 $G(x)=(I-H)(x)$，或 $H(x)=I(x)=x$．换言之，我们要求的解就是变换 H 的不动点．

上面的分析表明决定不动点和求解方程是一回事．这也就是许多数学存在的理由．因此，获得能告诉我们给定的一个变换在什么情形下存在不动点的某些一般性结果将具有重要意义．这正是我们将在后面几页中考虑的布劳威尔和其他人的著名的不动点定理的内容，但在很仔细地考察这些结果之前，让我们暂时把数学放在一边并来说明不动点的概念不仅仅是一种无用的数学上的好奇性而且也以一种极其重要的方式影响着现实世界的人们和巨大财富的活动．

美元和理智

1776 年苏格兰经济学家亚当·斯密[①]提出了操纵经济过程的一只“看不见的手”的概念，从而为贪婪的个人的自私行为怎

① 译注：Adam Smith，1723～1790.7.17，英国著名经济学家．

样能实际上有用于作为整体的社会的利益提供了一种解释.1874年,几乎整整一百年之后,L·瓦尔拉[①]作出了第一个协同的努力来数学地阐明亚当·斯密关于价格作为这样的看不见的手,或平衡因素,而有用于平衡供应和需求的观点. [63]

1932年,冯·诺伊曼在普林斯顿大学就他的经济过程理论组织了一个专题讨论班,并于1938年发表题为"经济方程组和布劳威尔不动点定理的推广".在该理论中冯·诺伊曼证明了为达到所有货物在最低可能价格下的最大产出的最优生产方法,同时该产出具有最高可能的增长率.就这样,他运用他的主要解析工具——布劳威尔不动点定理一下子把一般均衡理论从静态变换到了动态.冯·诺伊曼的工作是Y·巴拉斯科(Yves Balasko),S·斯梅尔(Stephen Smale),R·古德温(Richard Goodwin)和其他人关于经济过程的动力学,特别是关于经济能迅速变成各种类型的循环或混沌行为的方式的现代工作的直接先驱.

由于这些工作造成的数学和经济的结合是如此的成功,终于在一个世纪后当K·阿罗[②]主要是由于被称为"一般均衡理论"方面的工作而荣获1977年诺贝尔经济学奖时,这样的研究路线终于被证明为有理的.真是锦上添花,1983年G·德勃罗[③]由于在他的力作《价值理论》一书中所叙述的关于一般均衡理论的进一步发展而荣获诺贝尔经济学奖,该书展示的非凡的数学奇观完全逆转了数学家只是抽象过程的经营管理者的传统的观念,那个引起怀疑的荣誉现在正在传递到经济学家中去.以下是一个均衡经济的简单例子,它表明供应、需求和价格的概念是怎样和不动点的存在性相关联的.

---

① 译注:Marie-Esprit-Leon Walras,1834.12.16~1910.1.15,法国经济学家.

② 译注:Kenneth Arrow,1921.8.23~,美国经济学家.

③ 译注:Gerard Debreu,1921.7.4~,美籍法国经济学家.



枪和黄油

假定我们有一个由两个消费者组成的经济，他们只对两种商品：枪和黄油进行交易．假定没有生产．消费者要决定这两种商品的价格使得在这样的价格下市场供应等于需求．为确定起见，我们假[64]定在进行交易之前消费者拥有的两种商品的数量由下表给出：

	枪	黄油
消费者 1	8	0
消费者 2	4	8
合计	12	8

现在假定枪和黄油的价格分别为 $p_G=1$ 美元，$p_B=2$ 美元．那么消费者 1 通过市场价格卖掉枪和黄油的收入为 $8\times1+0\times2=8$ 美元，而消费者 2 的收入为 $4\times1+8\times2=20$ 美元．当然两个消费者各自对现行市场价格下的枪和黄油有一定量的需求．为简单计，假定消费者 1 收入的$\frac{1}{4}$用于枪而$\frac{3}{4}$用于黄油，而消费者 2 的收入平分于两种商品．一般均衡理论要寻求枪和黄油的价格水平使得在这样的价格水平下供应等于需求．

对于所选的价格水平 $p_G=1$ 美元和 $p_B=2$ 美元，我们已知消费者 1 的收入为 8 美元而消费者 2 的收入为 20 美元．于是对枪和黄油的需求为

	枪	黄油
消费者 1	2	3
消费者 2	10	5
合计	12	8

瞧！在这样的价格水平下对每种商品的供应和需求是相等的.所以枪和黄油的市场"结清"了,意即在这样的价格下经济处于均衡状态.

当然,在这个例子中我们随意凭空定了价格,然后验证市场在这样的价格下结清了.一般均衡理论的目的首先是要证明这样一组均衡价格的存在性,然后提供方法来计算这样的边际价格水平.该理论说永远存在一组价格,在这组价格下所有商品的供应等于需求,这一结果的已知的仅有的证明来自证明这组价格是一特定变换的不动点.这是如下事实的推论:我们可以把价格看成是向量的分量,向量的每个分量是一个非负实数.假如有 n 种商品,那么这种有 n 个分量的向量的集合构成一个拓扑空间,而且在合理的条件下经济的价格设定机制是该空间到自身的一个连续变换,即它把价格从该空间的一个点变换到该空间的另一个点.所以,让我们就一个简单的三商品经济的情形来察看不动点定理怎样能使我们建立起这些均衡价格水平.

65

在三商品经济中,三种商品,枪、黄油和汽车,分别以价格 p_G、p_B、p_C 进行交易.这些价格生成了一种商品的供应和需求,恰如我们不久前在枪和黄油经济中看到的.为符号简单计,我们把价格写作价格向量 $p=(p_G, p_B, p_C)$.一般说,一种特定的价格水平不会导致市场均衡,意即对一种或多种商品会有过量的需求.经济将对一组价格处于均衡,在这组价格下各种商品的供应至少和需求一样大,而且没有过量的需求.

第一个数学的智巧就是意识到只需要考虑相对价格.所以我们可以把价格规范化.其含义就是,如果我们乘以每个价格一个定数,例如把给定的美元价格转换成用日元表示的价格,不会发生真正的变化.所以,为了数学上的方便,让我们大家同意在一种"货币"中引用价格使得每种商品的价格在 0 和 1 之间,而且该经济中所有商品的价格之和为 1.形成这些相对价格的方法是用每个价格除以所有价格之和.那么,在三商品经济中每个

相对价格向量 p 就是如图 2.7 所示的价格三角形 P①.用了这么一点点数学手法,我们就可以把枪—黄油—汽车经济中均衡价格的存在性问题表述为一个不动点问题.下面就来讲讲怎么做.

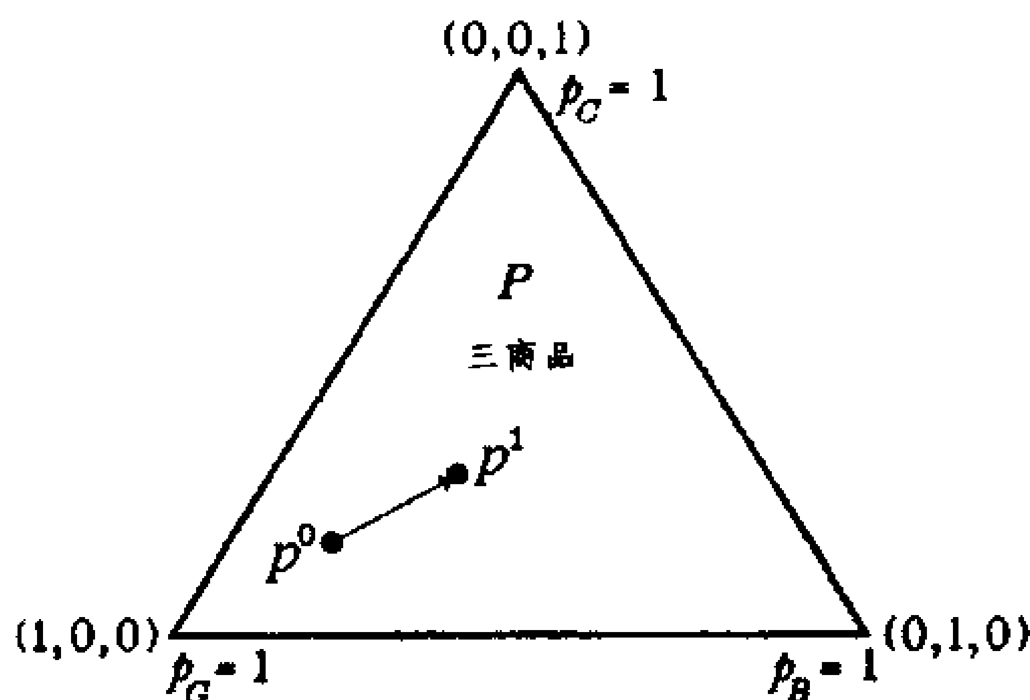


图 2.7 三商品经济的价格三角形

每组价格是价格三角形 P 内部或边上的一点 p.当三种商品的需求和供应变化时,价格也随之而变,当对商品有过量需求时就会导致比对商品有过量供应时更高的价格.假定三种商品的初始价格水平分别为 p_G^0,p_B^0,p_C^0.现在由于在这样的价格下的供/需的不平衡导致了价格的改变.这意味着我们有一个从价格三角形 P 中的点 $p^0=(p_G^0,p_B^0,p_C^0)$ 到一点 $p^1=(p_G^1,p_B^1,p_C^1)$ 的提升.但是我们可以把改变 $p^0\to p^1$ 设想为把价[66] 格三角形中一点变换到另一点的变换 T 的结果.用经济学的术

① 译注:即平面 $x+y+z=1$ 和第一象限 $x\geq0,y\geq0,z\geq0$ 所交出的三角形区域,顶点为 p_G,p_B,p_C.

语来讲，这样一个变换可以看作是一种价格设定机制，而且就经济均衡而言我们所需要的就是在价格三角形 P 中存在一点 p 使得 $T(p)=p$. 换言之，我们需要变换 T 的一个不动点.

就我们的目的而言，我们对价格设定机制 T 所要求的一切就是 T 把价格变换到价格（即，不会把三角形 P 中的点变换到三角形外边去），而且 T 是连续的. 粗略地讲，后者的要求意味着如果两组价格 $T(p)$ 和 $T(p')$ 是"靠近的"，那么原先的价格 p 和 p' 也必定是靠近的. 结果表明存在着许多价格设定程序，它们在数学上和经济学上都满足这些非常弱的条件.

把 T 的连续性和价格三角形的几何性质结合起来——一会儿就来概述这些性质——布劳威尔不动点定理就能使我们确信总是存在至少一组价格，它就是价格设定机制 T 的不动点. 读者不会有问题去理解怎样把这一方案推广到有任意多但有限种商品交易，而不是这里讲的只有枪、黄油和汽车交易的经济中去. 因此不动点的结果证明了一个极其重要的事实：在一种纯交换的经济中，存在着所有代理商都满意的价格，即市场对所有的商品都结清了. 「67」

现在让我们从经济领域转向数学领域，集中注意力于不动点理论以及人们怎样能实际地确定不动点.

圆盘、正方形和不动点

1910 年荷兰数学家布劳威尔发表了一篇题为"关于流形的映射"（"Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten"）的文章，一篇奠定了许多近代拓扑学基础的开创性论文. 特别是，布劳威尔在这篇文章中给出了现在称为布劳威尔不动点定理的第一个证明. 在用更一般的术语来叙述这个定理之前，我们首先来察看一下对平面上的正方形这一特殊区域而言的该定理.

考虑把正方形划分成像棋盘那样的正方形网格以及把该正方形映到自身的一个连续映射 f. 若 p 是正方形的一点，我们令

q 表示 p 被 f 映射得到的点，即，$q=f(p)$. 现在我们根据以下规则把每个小正方形标上标记：

1. 小正方形标记为 R，若 f 把该小正方形中的每个点移动到更靠近正方形（棋盘）的右边界；
2. 小正方形标记为 L，若 f 把该小正方形中的每个点移动到更靠近正方形的左边界；
3. 小正方形标记为 N，若它既非 R 又非 L.

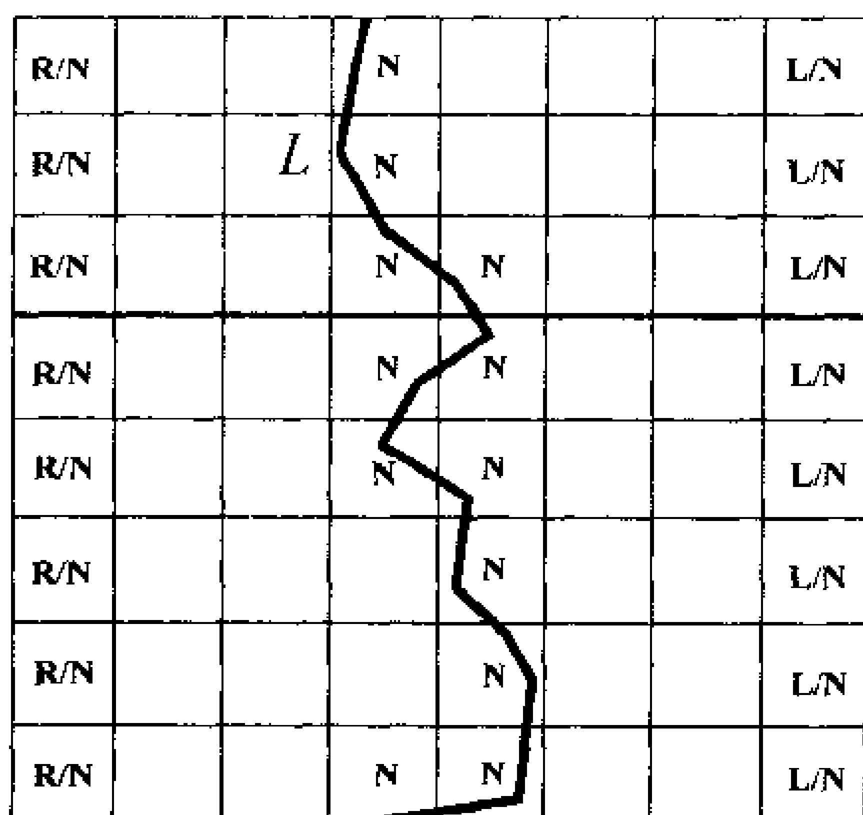


图 2.8 通过标了标记的棋盘的多角形路径

按这样的标记归类方案，我们看到正方形最右边列中的小正方形都不能标记为 R，因为 f 不可能把正方形的点映射到正方形的外边去. 同样的理由，正方形最左边列中的小正方形都不能标记为 L. 而且，没有点能同时既被移动到左边又被移动到右边，一个 L 正方形不能邻接一个 R 正方形（因为相邻接的正方形一定至少有一个公共点）. 这样设置的结果是，若不进入到一个 N

正方形,王棋永远不可能从棋盘的左边走到棋盘的右边.类似地,车只能通过 N 正方形才能从棋盘的底排移动到棋盘的顶 [68] 排.这意味着我们可以画一条只经过 N 正方形的从棋盘底边到顶边的连续折线 L.总的态势如图 2.8 所示.

现在我们取定折线 L,并从 L 上每一点 p 画一个箭头指向相应的点 $q=f(p)$.位于棋盘底边上的 L 的起点处,从 p 到 q 的箭头不可能指向下,因为 q 必须呆在棋盘上.因此,这个箭头一定是指向上的(不一定是垂直指向上的).类似地,位于棋盘顶边处 L 的终点处的箭头一定是指向下的.但因为映射 f 是连续的,当点沿 L 移动时其箭头的指向必须是连续变化的.因此在 L 上存在一点 p_1,从 p_1 到 q_1 的箭头的指向是水平的.但是根据 N 正方形的定义,包含点 p_1 的正方形也一定包含一点 p_2,其箭头是垂直指向的,或垂直向上或垂直向下.这是因为并非 N 正方形的所有的箭头都能指向左或指向右的.所以某些箭头指向右而某些箭头指向左.于是 f 的连续性确保了至少有一个箭头一定是指向上或指向下的,即是垂直指向的.然而,如果小正方 [69] 形足够小的话,这种正方形里的箭头从水平指向到垂直指向的跳跃仅当小正方形所有点处的箭头长度都很小时才会发生.

如果我们把棋盘划分成 n^2 个正方形,并令 n 趋于无穷让这种分划愈来愈细,前面概述的论证就能使我们得到一点 p^*,从 p^* 到 $q^*=f(p^*)$ 的箭头就消失了(长度为零).这就意味着 p^* 是变换(映射) f 的一个不动点.现在让我们更仔细地来察看一下布劳威尔结果的拓扑性质,同时考虑在更一般情形下的推广.

紧性和凸性

因为把正方形映到自身的每个连续映射都有一个不动点,因此不动点性质不能被设想成是映射的性质而应多多少少是正方形本身的拓扑性质中固有的性质.又由我们早先关于拓扑等

价性的结果，不论这个性质是什么，对平面上的闭圆盘而言也应有同样的性质，因为正方形和圆盘是拓扑等价的．为试图说明正方形和圆盘的使之具有不动点性质的这些特殊性质，重新考虑一下一维情形的单位区间是会有启发的．

回忆一下图 2.6，以下结论直观上看是清楚的：如果我们考虑去掉 $x=1$ 这一端点而构成的半开区间 $[0,1)$，那么就不一定会有不动点了．这是因为我们的连续曲线 $C(x)$ 可以用“挤压”在对角线下而不真正触到对角线的方法任意靠近 $x=1$．所以要使不动点论证起作用，底空间必须包含它的全部边界点．粗略地讲，任何有限维拓扑空间，如果它既是有界的（例如直线上固定的区间）又包含它所有的边界点，那么数学家就称它是紧的．但是正如下面的例子所表明的，空间的紧性仍不足以确保存在不动点．

假定我们在平面上有一个圆周（不是由圆周界住的点所构成的圆盘，而只是构成圆周的那些点）．该点集显然是紧的，因为[70]圆周是平面上的有界闭集．现在把圆周转一个不等于 360°的任意角度．这样一个旋转把圆周以连续的方法映射到自身．但圆周上每一点被该旋转映射到圆周上的另一个点；因此，没有不动点．

结果表明使之没有不动点的圆周所缺少的拓扑性质就是：若取圆周上任意两点并用直线段把它们联接起来，那么直线段上有的点不在圆周上．我们说一个拓扑空间是凸的，如果连接该空间任意两点的直线段完全包含在该空间中．图2.9展示了一

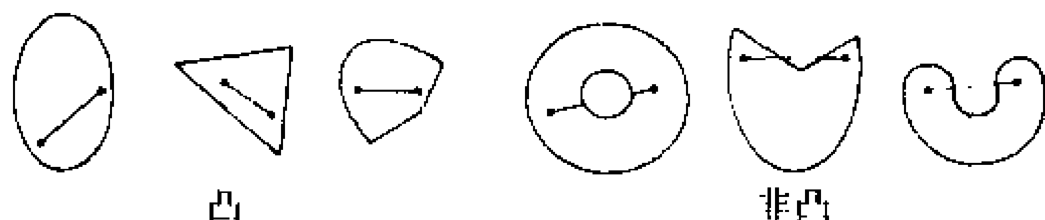


图 2.9　平面上的凸和非凸集

些平面上的凸和非凸集合.

为了以一种更为正式的术语来叙述我们关于不动点的主要结果，紧性和凸性就是我们所需要的全部条件.

布劳威尔不动点定理 假定 X 是一个既紧又凸的拓扑空间，又设 f 是一个映 X 到自身的连续变换. 则 f 在 X 中有一个不动点，即存在 X 中一点 x^* 使得 $f(x^*)=x^*$.

下面是一个有时被人们称为"豪猪定理"的简单例子. 它以一种多少有点别出心裁的方式来说明布劳威尔的结果.

豪猪和旋风

如果你察看(不要太靠近!)一头豪猪的刺，你会发现刺有一条直到后背的"头路"，以及沿胃部的另一条"头路". 拓扑学中，一头豪猪只是一只球(它的嘴是闭上的并忽略其内部结构)，因为所有我们要做的只是使它的腿变短并把它养肥，从而在某种程度上把它变换到一个球. 现在我们可以问：能把豪猪所有的刺都放平吗? 换言之，我们能"梳理"豪猪的刺使所有的头路都消失掉吗? 要是行的话，这将会给出一个光滑的通体是刺的球，不会有如图 2.10 所示的刺的排列. 作一些努力，应用布劳威尔不动点定理可以证明不可能存在刺的完全光滑的系统. 一定至少 [71]



图 2.10 豪猪刺的图案

有一根刺垂直地站立于头路的中心．能做到的最好的情形是把刺梳理得除一点外都是光滑的．

关于豪猪的这个极其有趣的事实的证明的基本思想包括建立一个“梳理映射”，在梳理后把豪猪的每根刺变为映射所指向的方向．稍做一点工作，可以证明每个这样的映射是连续的．于是布劳威尔不动点定理就可用来得出结论，在每一个这样的变换下至少有一根刺的方向保持不变．这就蕴含着不可能把刺都梳理得躺平．

这个结果的意义是很令人怀疑的，至少当它涉及豪猪时是这样．但是如若我们考虑地球的大气系统，那么事情就比较接近现实世界所关心的事了．拓扑学上讲，地球是一个球，而且问一下在地球表面上吹的风的方向这样的问题是有意义的．特别是，我们可以问：是否存在一点，在该点风不会在垂直方向吹．这样一点可能就是风的旋风模式所在的位置．把风的流线看作是豪猪刺的替代物，“豪猪定理”告诉我们不可能梳理风向使得风向模式是旋风的点消除掉．这是因为流线构成［72］了地球表面上一点到地球表面上另一点的一个连续映射（用数学术语说，从球面 S^2 到自身的映射）．所以只要有地球所属的拓扑类的知识（无柄的球），我们就可以说一些关于风向模式的有趣的事，而无须要有任何关于大气物理、气象学或美容学方面的详细知识．

说也奇怪，在像面包圈那样形状的行星上确实存在稳定、光滑的风向模式．位于中心的洞把这样一个超曲面的行星变动成有一个柄的球所属的拓扑类．而布劳威尔的结果不能应用于这样一个空间（为什么？）．反过来，这个事实提供了光滑风向模式、光滑豪猪以及没有旋风的可能性．

既然布劳威尔的结果使我们确信像不动点那样的事确实存在，让我们花一点篇幅来考虑人们怎样能真正求得不动点．

不动点的确定

布劳威尔证明了任何一个紧凸集到自身的连续映射一定有一个不动点.但是关于如何去求得这样一个有特征的点(不动点),他的证明并没有提供多少线索.该证明是存在性的而不是构造性的,以下事实使人倍觉奇怪,即布劳威尔把他的事业的后半段用于谴责在数学命题的证明中应用这类非构造性的方法.但是在布劳威尔关于不动点存在性的非构造性证明发表不多几年后 E·斯彭内尔(Emmanuel Sperner)在写成于 1928 年的毕业论文中发表了现在称之为斯彭内尔引理的关于给一组几何对象中的元素标以标记的结果,该结果已被证明可以作为实际上计算不动点的整个一类算法的基石.由于篇幅的限制我们不可能在这里对这些计算方法进行详细的讨论,但是我们可以花一点时间来概述一维情形时该方法的一般想法.

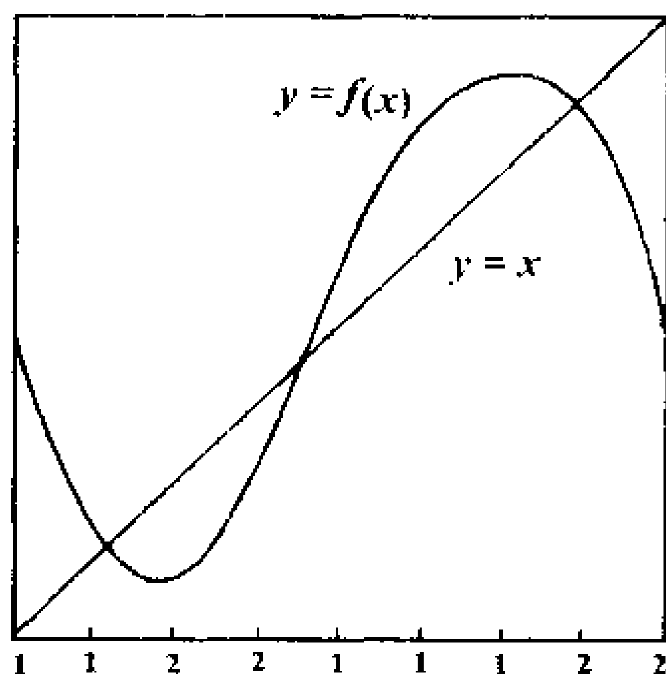


图 2.11 单位区间的子区间的标记



考虑一个把单位区间映射到自身的连续函数f的情形.假定我们把该区间划分成子区间,并按如下规则对子区间的端点标上标记:如果在子区间一个端点处的函数值位于对角线的上方,则把该端点标记为1;但若在该端点处的函数值在对角线的下方,则把该端点标记为2.对于在单位区间上有三个不动点的函数f的一般情形如图2.11所示.(提醒一下:曲线与对角线相交点的x值都是不动点.) [73]

上面的标记方案有如下的性质:端点标记不同的子区间一定有一个f的不动点.这是因为如果曲线在子区间的一端位于对角线之下,而另一端位于对角线之上,连续性要求在两端点之间一定有一点,曲线和对角线交于该点.所以,如果子区间足够小,那么端点标记不同的子区间中任何一点都可以作为不动点的近似值.令子区间的长度收缩为零,映射f的连续性结合着单位区间的紧性确保任何近似不动点序列将收敛到f的一个真正的不动点.

在这个一维框架中,至少存在一个端点标记不同的子区间是显而易见的.这正是斯彭内尔结果的一维情形的版本.斯彭内尔引理把这个结论从线段的子区间推广到直线上区间的高维类似物,例如二维空间中的三角形和三维空间中的四面体的顶点的标记法.反过来,这个事实也允许我们得出结论:如果我们考虑把紧、凸拓扑空间映到自身的一个连续映射并把该空间划分成足够多的这样的对象,那么一定至少有划分中的一个元素,其中包含了该映射的一个不动点. [74]

在1960年前后,数学规划和经济学领域的研究工作者已经发现斯彭内尔引理对数值近似求解不动点的用处.把有兴趣的空间快速剖分成小块然后有效搜索所有标记不同的小块的计算程序已经研制出来,斯彭内尔引理告诉我们这样的小块一定存在.根据前面对一维情形所用的同样的推理方法,这样的小块一定包含变换的一个不动点.所以把小块分得愈来愈小,就可以得到不动点的极好的近似.有兴趣的读者可在为本章列出的文献

目录中H·斯加夫(H. Scarf)的文章中对有关这些方法以及它们为什么有效获得更多的细节.

不动点性质

像闭有界的线段以及平面上闭的正方形和圆盘那样的许多重要的集合都有不动点的性质.即,任何这些集合到自身的连续映射都有不动点.我们早就在证明诸如经济中的均衡价格那样的事物的存在性时知道了这一事实的重要性.但当面对更复杂类型的空间时,并不总是容易直接证明该空间具有不动点性质的.所以我们常常被迫用试图证明原来有兴趣的空间是拓扑等价于像正方形或球那样早已证明是具有不动点性质的空间的办法来间接地处理问题.这正是把我们关于空间的拓扑等价性的早先的结果与例如由布劳威尔得到的不动点结果联系起来的方法.

例如,假定我们从平面上的闭椭圆到自身的一个连续映射 f 出发.我们也许意识到闭椭圆是既紧又凸的,因此允许我们直接应用布劳威尔不动点定理来证明作用在椭圆上的 f 的不动点的存在性.但是万一我们没有注意到闭椭圆的这些好的性质,那么就有另一种不那么直接的方法.

代数上看,椭圆是由 $x-y$ 平面上满足不等式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$$

的点构成的,其中 a 和 b 是表示椭圆的半长轴和半短轴的实数

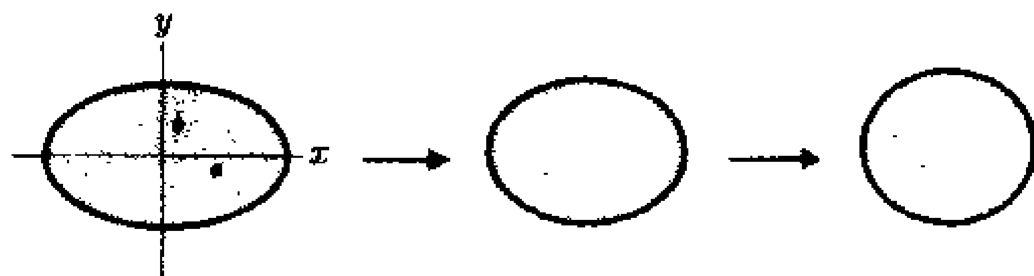


图 2.12 椭圆到圆的变形

(见图 2.12). 现在我们通过先让 a 光滑地趋于 b, 再让 b 光滑地趋于 1 来变形该椭圆, 如图 2.12 中间所示. 如果在怎样进行这个极限操作时是小心的, 那么我们得到的是生成了一系列新的区域, 每一个都等价于原来的椭圆. 椭圆的这个变形序列的终极正好是单位圆盘

$$x^2+y^2\leqslant 1.$$

我们早就知道它具有不动点性质. 但由于这个性质是在拓扑变换下不变的, 从而原来的椭圆也一定有不动点性质. 证毕.

然而, 我们喜欢的理想的做法是能用来决定任意给定的集合有还是没有不动点性质的一些容易验证的条件. 不幸的是, 看来不存在既必要又充分的这样的准则. 但这并不意味着我们是全然无能了. 例如, 一种很好的可用的经验法则就是要求具有不动点性质的集合既是紧的又能收缩到一点. 后者的条件意味着我们可以连续地把该集合收缩到一点, 就像我们可以连续地减小半径使之趋于零而使圆盘收缩到一点那样. 或设想一组称为 matrioshka① 的俄罗斯洋娃娃, 每一个洋娃娃伴有一个她自己的 [76] 较小的副本. 如果大的洋娃娃就是我们感兴趣的空间, 那么如果连续地收缩这个洋娃娃最终得到一个洋娃娃, 它只包含一个点. 如果这样的收缩是可能的, 那么原来的"妈妈"洋娃娃就是一个紧的、可收缩的集合. 如果一个集合没有紧性或可收缩性, 那么我们通常可以找到一个连续映射, 在该映射下该集合没有不动点.

但是不要那么快下结论. 确实存在既非紧又没有可收缩性的集合, 但是这些集合确实具有不动点性质. 但是这些集合是相当病态的. 这类集合的例子由图 2.13 所示. 不幸的是, 事情还有另一面, 既紧又可收缩的集合也可能没有不动点性质. 例如,

① 译注: 俄文 Матрешка, 村姑形状的木偶(一种玩具, 一般有大小不等的好几个, 小的能套在大的里).

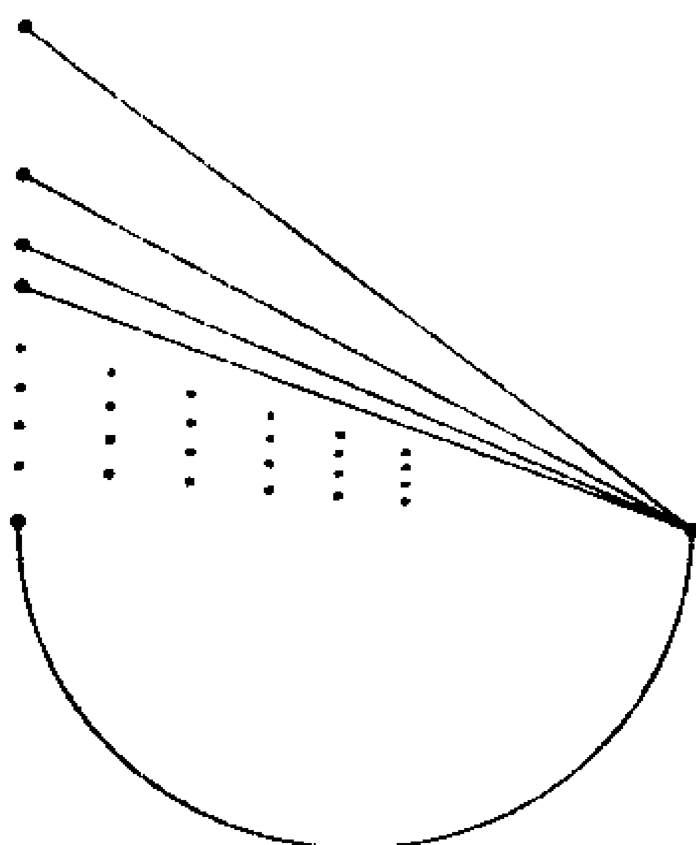


图 2.13 具有不动点性质的非紧非可收缩集合

1953 年树下真一[1]得到的如图 2.14 所示的 R^3 中的既紧又可收缩的子集，但是它没有不动点性质. 所以我们能说的最好的话就是紧性和可收缩性是一个集合可能具有不动点性质的拓扑指示器. 但是这两个条件既不是生成不动点性质的必要条件也不是充分条件.

由于我们前面的研究，在理解什么类型的经济行为在一种经济中是可能和不可能时难于说明基于不动点概念的拓扑方法并不具有关键的重要性. 但是我们发现不只是在经济中，实践家[77]们利用不动点的论证方法证明他们所关心的问题的解的存在性. 所以，为了支持在人类事务中不动点的重要性这一实情，我们用来自许多领域的以不同的风格和行话表述的应用布劳威尔

① 译注：Kinoshita Shin'ichi，日本数学家.

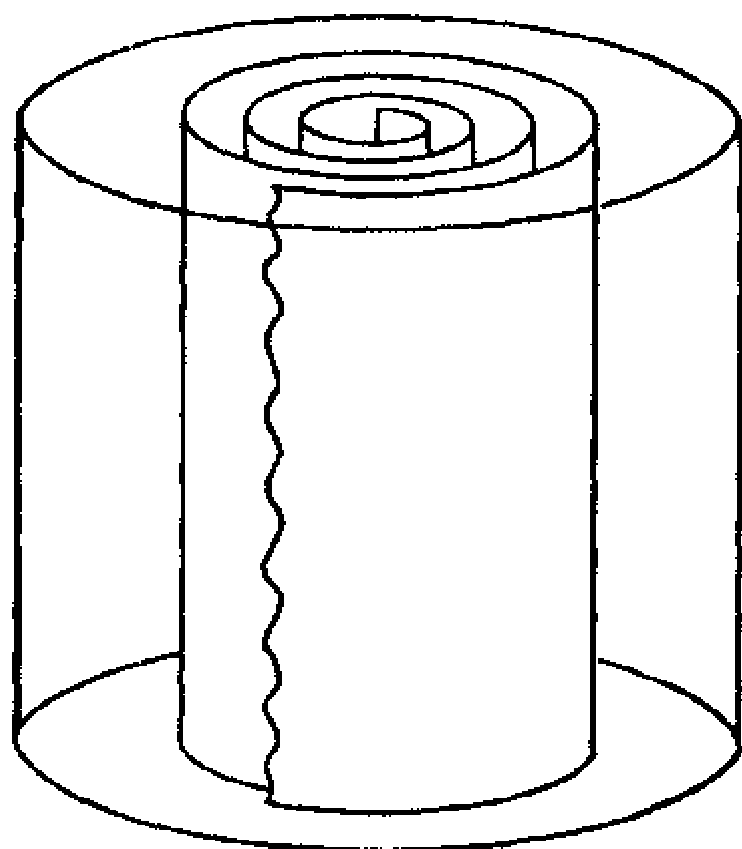


图 2.14 没有不动点性质的既紧又可收缩集合

的开创性结果的几个例子来结束本章.

登 月

1969 年 7 月 22 日阿姆斯特朗[1]成了立足于地球之外星球上的人类的第一人,但是在所有的媒体大吹大擂的宣传以及 NASA[2]的大肆吹嘘作为支撑阿姆斯特朗历史性成就的工程和技术进展的背后,历史性的阿波罗 11 登月使命的真正的但未曾

① 译注: Neil Alden Armstrong,美国宇航员,阿波罗(Apollo)宇宙飞船指令长.

② 译注: National Aeronautics and Space Administration 之缩写,美国宇航局.

提及的不是别的什么事物而恰恰是在重力场作用下运动的质点的牛顿[①]运动方程组. 粗略地讲,把阿波罗 11 航天舱从地球输运到月球的问题需要在如下条件下求牛顿方程组的解,运动的轨道应从佛罗里达州的卡纳维拉尔角出发而在月球的"静海"(Sea of Tranquility)西南边缘附近的平地上着落. [78]

登月问题就是我们所谓的两点边值问题. 如果我们令 $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$ 表示阿波罗 11 航天舱在任意时刻 t 的空间坐标,而记 $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ 为航天舱在三个空间方向的速度. 那么只要给出了这 6 个数就能表征任意时刻航天舱的状态. 换言之,阿波罗 11 飞行任务的时间历程,抽象地说,只是 6 维空间 R^6 中的一条曲线. 边界条件要求曲线在时刻 $t = 0$ 的空间坐标为卡纳维拉尔角的空间坐标,而在飞行任务完成时的未来的一个确定的时刻 $t = T$ 处曲线的空间坐标应该是静海的空间坐标. 而且在终止时刻速度坐标应为零,从而保证宇航员不必摔机着陆. 最后,初始速度坐标正好是由携带阿波罗 11 航天舱进入轨道的土星火箭的推力给出. 所以数学问题就成了在 6 维空间中求一条满足上述条件的曲线,而且在 $t = 0$ 和 $t = T$ 间的任意时刻满足牛顿第二定律(力 = 质量 × 加速度).

首要的任务是要让我们自己确信确实存在满足上述两点边值问题各项要求的某条曲线. 如果存在不止一条曲线,那么我们可以就哪条曲线能极小化输运时间、燃料消耗、设计费用或 NASA 的工程师们会凭空想出的保证优质的准则进行争辩讨论. 设定存在性这就是不动点定理要出场起作用的地方了.

在空间 R^6 中连接两点的所有光滑曲线的集合是一个无穷维拓扑空间. 一般说,至多有一条这样的曲线在任意时刻满足牛

① 译注:Isaac Newton, 1643.1.4 ~ 1727.3.31,伟大的英国物理学家、数学家.

顿运动方程组.所以,我们从联接两个边界点的所有曲线($x(t)=(q_1(t),q_2(t),q_3(t),p_1(t),p_2(t),p_3(t))$中任选一条曲线开始.把该曲线记为 $x_0(t)$,它可能并不满足我们的要求,所以我们需要发展一种从初始猜测 $x_0(t)$进行改进的某种方法.

为此,我们首先构造一个映射 $\boldsymbol{F}$ 把通过两个端点的所有曲线构成的空间中的任一条曲线映射到该空间的另一条曲线.其[79]次,我们要求在 $\boldsymbol{F}$ 下保持不变的曲线(不动点)具有满足牛顿方程的位置和速度向量.重复应用这个变换 $\boldsymbol{F}$ 导至一个迭代过程,$x_1(t)=\boldsymbol{F}(x_0(t))$,$x_2(t)=\boldsymbol{F}(x_1(t))$等等.如果曲线序列$\{x_0(t),x_1(t),x_2(t),\cdots\}$收敛到一条确定的曲线 $x^*(t)$,则该曲线就是 $\boldsymbol{F}$ 的一个不动点,因此也就是我们问题的解.

我们从这一概述知道为了求助布劳威尔不动点定理以确保存在一条登月轨道,我们要做两件事:(a)把布劳威尔原来的结果推广到由通过卡纳维拉尔角和静海的曲线构成的无穷维拓扑空间的情形,(b)构造该空间上的连续映射 $\boldsymbol{F}$ 的方法使得其不动点正好是牛顿方程的解.

(a) 由属于绍德尔①的关于布劳威尔结果的重大推广而得到满足,1930 年绍德尔在无穷维拓扑空间的情形证明了一个类似的不动点定理.适当的映射 $\boldsymbol{F}$ 的构造则需要把牛顿运动方程组表为积分方程组而不是微分方程组的形式,然后应用称为压缩映射原理的结果,这是一个与布劳威尔不动点定理密切有关的数学成果.但是要进入到怎样确切地去做,则要求读者具有比我们所假定的阅读本书需要的数学基础要多的数学基础.所以,只要说明构造 $\boldsymbol{F}$ 的方法确实存在,并在证明广泛一类重要问题(不全是物理学中的问题)解的存在性的一切应用数学领域中经常结合着不动点的论证在用就足够了.下面是这类问题中的另

① 译注:Juliusz Paweł Schauder,1899.9.21~1943.9,德国数学家,被纳粹杀害.

一个例子,这是一个来自社会科学领域的问题.

职 业 流 动

社会学家关心不同的职业阶层之间从一代到另一代的变动.作为一个简单的例子,假定有三种职业阶层:上等(U),中等(M),和下等(L).基于1940年代后期在英国和威尔士收集到的数据,图2.15中的图展示了个人隔代从一个阶层流动到另一个阶层的概率.我们也可以用矩阵来表示这些状态转移: 80

$$P = \begin{matrix} & U & M & L \\ U & 0.448 & 0.484 & 0.068 \\ M & 0.054 & 0.699 & 0.247 \\ L & 0.011 & 0.503 & 0.486 \end{matrix},$$

其中我们把位于i行j列的数解释为在i职业阶层有工作的人的儿子或女儿在j职业阶层找到工作.

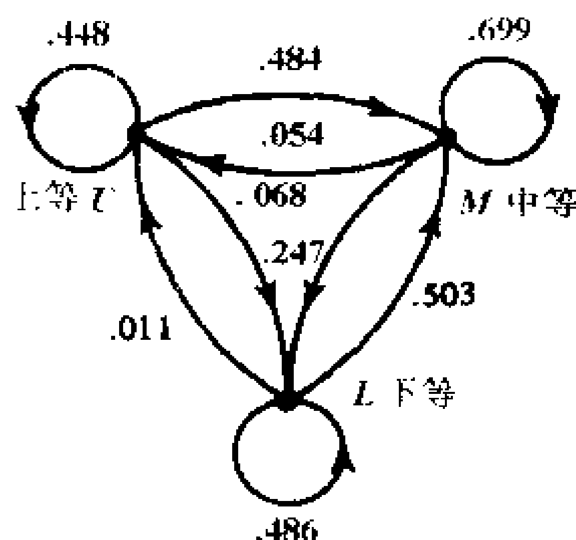


图 2.15 两代人之间职业流动的转移图

假定用向量$x(t) = (x_U(t), x_M(t), x_L(t))$表示$t$时刻在每个职业阶层中的劳动者所占的部分(百分比).那么根据定义x_U,x_M和x_L都是0和1之间的非负数,并满足约束$x_U + x_M +$

$x_L = 1$. 向量 $x(t)$就是所谓的概率向量. 如果 $x(0)$是 $t=0$ 时刻系统的状态,那么向量和矩阵相乘的规则给出了 $t=1$ 时刻的状态为 $x(1)=x(0)P$. 于是,在 $t=2$ 时刻的状态为 $x(2)=x(1)P=x(0)P^2$,一般情形,t 时刻的状态为 $x(t)=x(0)P^t$. 我们可以问的可能是唯一的最重要的问题就是:在充分长的时间间隔后状态$x(t)$是否会收敛到一个确定的劳动者分布 x^*?

为回答这个问题,我们注意到 $x(t+1)=x(t)P$. 这蕴含着如果当 t 趋于无穷时 $x(t)$趋于一个向量 x^*,那么因为矩阵 P [81] 与t 无关,我们一定有 $x(t)P$ 趋于x^*P. 换言之,如果 x^*存在,一定是由矩阵 P 表示的线性变换的不动点,即 $x^*=x^*P$. 变换 P 把所有概率向量构成的空间S 映到自身. 但是 P 是S 到S 的常数变换,因此是连续的,而且 S 也是R^3 中的紧凸集. 所以立即从布劳威尔不动点定理得到这样一点 x^* 的存在性.

我们建议读者来验证这个职业流动例子中的极限状态为 $x^*=(0.067, 0.624, 0.309)$来结束这个例子. 由此我们得出结论:个人最有可能谋到的工作是中等职业阶层的工作,它是下等职业阶层可能有的结果的两倍. 找到上等职业阶层职位的可能性只是十六分之一(当然是这样!)现在我们来说明人们是怎样参与本章开始时关于回答"谁是第一名?"的问题的辩论来结束我们关于不动点的讨论.

夺 魁 者

通过说明橄榄球队的实力可以貌似有理地用一个包含非负量 a_{ij}的数学函数来度量,我们开始了本章的讨论,其中 a_{ij}依赖于i 队和j 队比赛的结果. 把这些数排列成一个矩阵,我们进一步看到要造出一个球队的排名向量 r 可以归结为求方程组 $Ar=r$ 的一个解. 这里我们要进一步探讨这个问题,首要的是要确保这样的排名向量实际上是存在的.

研究结果表明在关于矩阵 A 的元素 a_{ij} 的相当弱的条件下，矩阵论中的一个名为裴龙—弗罗贝尼乌斯(Perron - Frobenius)定理的重要结果告诉我们这个问题有解. 大致说来，该定理说：存在唯一的一个分量为非负的排名向量 r，r 满足方程 $Ar = r$. 反过来，裴龙—弗罗贝尼乌斯定理的结论是从布劳威尔不动点定理的应用中得到的，该定理确认了像 A 那样的元素为非负数的矩阵是非负向量集合到自身的一个连续的线性变换. 因此，一定至少存在一个满足 $Ar = r$ 的向量 r. 裴龙—弗罗贝尼乌斯定理加强了这一结果，告诉我们在应用于这类问题的条件下，实际上只存在一个这样的向量. [82]

假定我们采取早先对数 a_{ij} 给出的简单选择，即

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } i \text{ 队胜 } j \text{ 队;} \\ \dfrac{1}{2}, & \text{若 } i \text{ 队和 } j \text{ 队打成平手;} \\ 0, & \text{若 } i \text{ 队输给 } j \text{ 队.} \end{cases}$$

现在我们来猜一个初始的排名向量 $r^{(0)}$，取所有的分量为 1. 这意味着一开始所有的队都有相同的实力. 于是向量 $Ar^{(0)}$ 的第 i 个分量就只是简单地表示 i 队在比赛中赢的比例. $A^2r^{(0)}$ 的第 i 个分量就是被 i 队打败的队的比赛中平均赢的比例. 这个向量可能包含了有关 i 队比赛日程安排的效力的有价值的信息. 这是否可以用来作为决定全国冠军的好的度量呢？是的，这比与各队比赛中简单的赢的比例，向量 $Ar^{(0)}$ 要好一点. 但这仍然不够好.

上面对矩阵元素 a_{ij} 所给出的选择是极不完善的，特别是对像橄榄球那样的运动，队与队之间只赛一次，或偶尔赛两次(另一次在季后赛中). 例如，不管比赛是非常的一边倒还是旗鼓相当，数 a_{ij} 的确定把所有的分数都给了胜方. 而且击败每赛必输的队比不与该队比赛对你的排名更为有害，因为胜队打败每赛必输的队得到的贡献为零而比赛次数却增加了一次.

之所以会发生这种情形是因为排名方案给每赛必输的队指定的 a_{ij} 为 0.

一种较好的指定 a_{ij} 的方法也许是把比赛两队间的得分以连续的方式进行分配. 例如说, 若 i 队与 j 队比赛时得分为 S_{ij}, 而在同一次比赛中 j 队的得分为 S_{ji}, 我们可以给 i 队指定 $a_{ij}=(S_{ij}+1)/(S_{ji}+2)$. 但这种方案有其自身的弱点, 即, 为了排名在前列, 一个队可能会毫不心慈手软. 它可能会尽可能地得高分, 即使是比赛对方早已不可收拾. 所以为了避免有的队用这样的"夸张"来改善其排名, 我们应该把一个得分点进行非线性的分配. 这样做的好的方法在文献目录中列出的有关本章的资料中进行了讨论. 但是, 即使是这样的 a_{ij} 的指定法也有缺陷, 即太强调一个队的比赛日程安排的效力. 这是因为一个队与较弱的对手比赛时永远不可能取得足够高的得分以得到较前列的排[83] 名. 那么, 有什么可做的呢?

对付"比赛日程安排的效力困境"的一种办法最近由数学家 J·基纳提出. 他的想法是, 把每个队的排名看作是每次比赛的结果的一个非线性函数来计算. 更具体地说, 代替 a_{ij} 为常数的线性规则(见"针和干草堆"一节中的方程(*)), 基纳采用了一个公式, 其中这些量本身都可能依赖于一个队的排名. 这就导致了本周排名和下周排名间的一种非线性关系.

在澄清了所有数学上的模糊之处后, 按基纳的方案求排名向量 r 就必须要解一个非线性方程组 $r=F(r)$, 其中 F 是一个先前说过的映超正方体(不过这次的边长为 1 而不是 100)到自身的连续但是非线性的映射. 但是我们知道布劳威尔不动点定理对正方体是成立的, 所以我们可以用它来断言至少存在一个向量 r, 它是 F 的不动点. 所以基纳的问题有一个解. 利用这个非线性方案基纳得到了图 2.1 倒数第二列所示的 1993 年美国大学生橄榄球季的排名

为结束本节的讨论, 把这个数学方法和体育记者以及教练

的排名进行比较是很有趣的.首先,由基纳方程组得到的排名和民意测验的排名间的变动远比民意测验相互间的排名的变动要大得多.这就意味着民意测验远非是独立的.这种比较结果还指出实在是不存在"最好"的排名系统:不同的方案给出了不同的结果,因为它们对主要因素赋予了不同的权重.而当你"挤住"了一种方案扔掉了某个坏的表征,你最终总会引进一个你想要去掉的反直觉的方面.最后,在对这些方法进行了若干年的研究后,基纳感到直觉是一种决定排名的相当差的导向.看来对于有超过100个队的大学生橄榄球队参加的比赛,对于能适当地考虑所有的直觉因素而言,要考虑的因素也许太多了. [84]

[85]

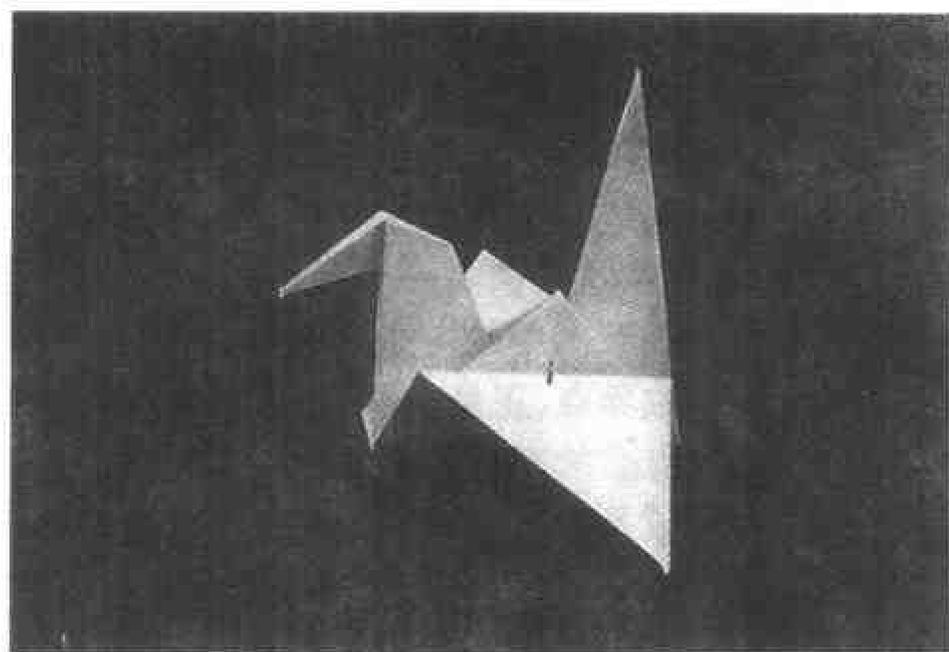
第3章 莫尔斯定理(奇点理论)

纸张揉皱的方法

与西方文化大相径庭的日本文化以其众多高雅而深奥的形式——十七音诗、禅宗佛教、相扑、盆景艺术、歌舞伎——而享有盛誉.应该列出的另一项就是其精致的折纸艺术,或用日本话说所谓的日本折纸术(origami).这涉及把一张纸以一种方式折起来使得打开时突然展现出一个完全意想不到的形状,通常是某种动物的形状.例如图3.1所示的由一张平坦的方块纸折成的飞鸟.

数学上讲,日本折纸术涉及一个把二维对象变换成一个三维对象的变换,纸上的折痕就是折成的三维对象在平面上的二维投影.日本折纸术爱好者的基本问题是:给定一个三维"目标"图形,它在方块纸上的投影是什么?换言之,人们必须在何处以及怎样去折纸以创造出一个特定的对象?就其本身而论,日本折纸术属于投影几何学的领域.

本章中我们关心的是抽象或具体地描述我们可以期望的诸如活的有机体或股票价格的浮动那样的事物的几何形状,它们的活动是按照物理学、生物学、工程、经济或不管什么样的规律进行的.这样的实际现象是由像细胞中各种化学物质的浓度这样的量或者像金融市场中的利率和公司利润这样的经济因素来刻划的.于是,细胞的集合(即有机体)的真实的物理形状或有价证券价格历史的抽象形状就由这些因素之间的关系来决定.用



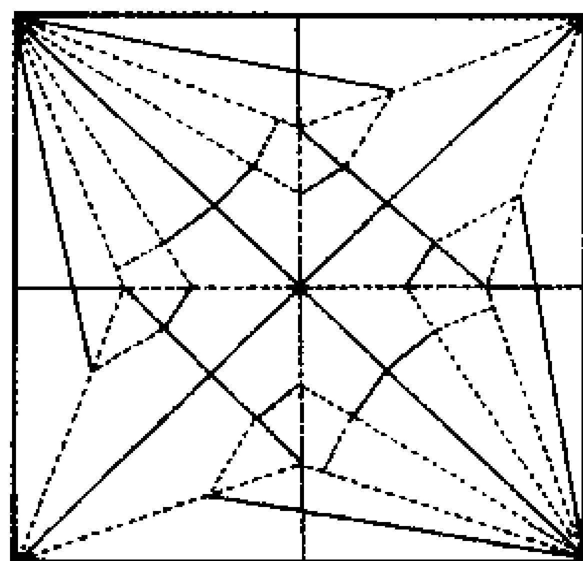


图 3.1 飞鸟的日本折纸术

稍微数学一点的术语讲,形状是这些变量的函数.

在大多数情形,如果我们只是改变化学物质浓度的值或经济因素水平一点点,那么系统的"形状"也只稍稍改变一点.但有时候存在着一组特定配置的值,使得当我们稍稍离开它们一点,由此产生的有机体或股票价格曲线的形状可能会有剧烈的变化,例如从男人变为女人,或者从稳定上升的价格周期变成市场

的崩溃.为说明这一点,一种经济可能处于几种状态:繁荣、衰
[87] 退、缓慢增长、滞胀[①]、或者萧条.假定这些状态都是像货币供应、失业、外汇支付、结存,以及消费者的信心等变量值的最终结果.因此,经济所处的特定的状态是这些量值的函数.于是,在这些变量的某些值处,当从这些值有一个微小的变化时就可能把经济从这些性质不同的状态中的一个变到另一个,这些值就是刻划该经济的函数的临界点.正是在这里,对经济的小的输入可能会导致该经济的"输出"的剧烈变化.

本章的重要内容就是关于数学上如何去确定这种化学物质
[88] 的浓度或经济因素的临界区域,以及如果我们进入到这些"危险地带",可能会有什么类型的不连续变化出现.因为物理和社会现象的数学描述是由函数来实现的,所以我们在这里的工作就是刻划"典型"函数的性态和几何形式.

为了理解这意味着什么,设想一个旋涡——或许该去看一下水流向澡盆排水管时的情形.现在假定有一点肥皂漂浮在排水管附近的水面上.一旦肥皂充分靠近旋涡,那么肥皂运动轨道的几何,即运动的方向、速度,螺线的指向,将由旋涡的运动来决定,即使肥皂不是在旋涡中而只是在它的附近.位于旋涡中心的点就是我们所谓的临界点的一个例子,在这种情形下,就是描述流体在澡盆排水管附近区域流动的函数的临界点.在这个澡盆例子中的临界点就是把附近的点吸引过来或"吸入"的点.但在不同的情况下,临界点也可能是把附近的点排斥出去的点,或甚至可能是使系统在该点处有着更为复杂类型的局部性态的那种点.当我们读遍本章后我们会看到这种可能性.

从这个旋涡的例子易知正是临界点的性质——它的强度、作用范围、旋转方向——决定着附近的漂浮对象的路径,即局部性态.在数学中也是同样的情形,函数在它的一个临界点处的性

① 译注:经济停滞下的通货膨胀.

态告诉我们该函数在附近点处将会有怎样的性态.本章的主要目的之一是要确切地说明数学上这意味着什么并确切地详细说明在临界点附近会出现的性质上不同的局部性态.

识别一个函数在临界点附近局部性态的关键因素就是要去掉由于我们碰巧选用的写下该函数的方式的偶然因素引起的该临界点性态的一切方面.所以在股票市场的情形,无论由诸如利率、公司利润或类似的自变量表示的价格函数是什么,该函数的内在性态肯定地应该与我们碰巧选用了美元或日元来度量价格或当前的利率是用百分数或小数点表示无关.简而言之,我们要寻求的是函数的性质,它们在我们碰巧用来显式地表示该函数的任何坐标系里"看来都是一样的". [89]

读者一定会看出这个问题和我们在第二章中碰到的是同样的问题,第二章中要求寻找一个闭曲面在挤压、伸展、扭转或不撕裂、不在曲面上打洞的任何变形下保持不变的性质.除了被变换到自身的是其"点"为函数的抽象空间而不是由几何点构成的拓扑空间外,这里的情形是同样的.我们将试图去识别的就是能展示整个一类函数的性态特征的"最简单的"函数,例如说,带两个柄的球可用来完全表示所有的亏格为2的定向闭曲面的拓扑结构.

历史上,本章着重要讲的研究路线的出现也是和折纸有关的一个问题有联系的.假定我拿了一张相当柔软的纸,例如说手巾纸,并按我的心意把它压皱,而仅有的限制是不允许有折痕.图3.2展示了在放大镜下看到的这个纸团的一小部分的可能的样子.现在假定一只小虫(或许是只苍蝇)在这揉成一团的纸上行走,当苍蝇沿曲面行走时会碰到像 a 这样的点,在它附近曲面是平坦的,也会碰到像 b 这样位于"峭壁"边缘的点,以及其他类型的点 c 和 d,它们在几何上甚至更为复杂.所以人们理所当然地会问:如果对纸被压皱的方式没有什么特殊之处,即不同于要求压皱不产生折痕,而是对压皱的方式不加任何限制,那

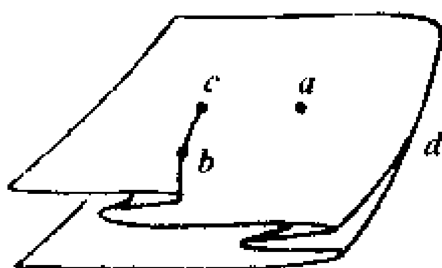


图 3.2 揉成一团的纸上的局部区域

么当苍蝇在揉成一团的纸上漫游时,它能期望碰到的点的类型[90]是什么呢? 换言之,什么是碾压一张手巾纸的"典型"方式呢?

为了更充分地了解这个问题,让我们更具体一点来看看"折痕"的含义是什么.没有折痕只不过是意味着纸的扭转和收紧放松都是数学家所谓的"光滑的";所以和日本折纸(为展开成各种形式,线条分明的折痕是关键的)不同,这里我们不允许在纸上有刀口那样的折痕.在这样的条件下,一般讲,在任一点附近揉成一团的纸团可以呈现的样子有三种可能的形式:

a. 在该点附近纸是平坦的.

b. 该点位于纸的一条折线上.

c. 在该点一条褶裥正在形成.

图 3.2 中标记为 a, b, c 的点分别表示这三种类型的点.

无须对揉纸团做太多实验就会发现还可能有其他类型的点.例如图 3.2 中的点 d 就是一种新类型的点.但是对纸做一点扭转和折叠的实验,我们很快会发现,如果点不是 a,b 或 c 型的,那么纸的位置的任意小的改变就可以变掉这样类型的点.图 3.3 展示了只要底褶裥稍稍往右挤一下就看到 d 点的类型是怎样变掉的.另一方面 a,b 和 c 型的点不可能通过这类小的改变而消失的.所以当苍蝇漫游在一张压皱过的纸的表面时能期望碰到点的类型正是这类点.用更正式的语言说,只包含这三类典型点的纸的压皱称为通有的(压皱).因为任何其他的压皱都可以通过原来揉成的纸团的一个任意小的形变变成通有的压皱.

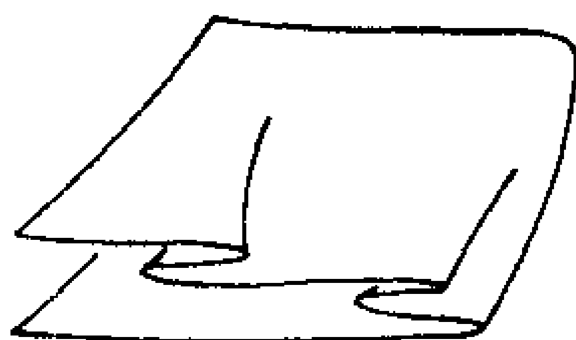


图 3.3 纸的通有的折叠

我们不仅看到了类型 a,b 和 c 的点是典型的可能性,而且还知道是什么原因使它们成为典型的:它们在如下意义下是稳定的,即揉成的纸团的小的扰动不能改变这些点的类型.像 a 那样的点是最简单、最普通的点,所以称之为正则点.其他类型的点都称为奇点,因为它们构成了所有可能的点集中的很小的子集.在所有的奇点中,只有像 b 和 c 那样的点是稳定的.所以,我们假设的苍蝇,当它漫游在手巾纸上时,能期望碰到正则点、褶点或两条褶线相交的点(数学上称为尖点).如果苍蝇碰到了任何其他类型的点,那么它就有理由感到惊奇.而且这种令人感到惊奇的点的类型总可以通过把纸团轻轻摇动而变成像 a,b 或 c 那样的点.

光滑地揉手巾纸的过程是把一张平面(原来的一片平的纸)变换成另一张揉成团的纸的变换的例子.(回忆一下:从第 2 章我们知道,只要纸没有被撕裂,那么一张平坦的手巾纸是拓扑等价于揉成团的纸的.因此,揉的过程在数学上和把平面变为自己的变换是一样的.)所以,这是对平面上每一个老的点指定平面上一个或多个点的函数的例子.从而在这样的意义下,就像对前面的经济例子中所做的那样,我们可以把原来的平坦的手巾纸看成是变换的"输入",于是"输出"就是迄今可能还在你的废纸篓里的纸团.

上面给出的论证构成了由 H·V·惠特尼[①] 于 1955 年证明

① 译注:Hasster V. Whitney, 1907.3.23~,美国数学家.

的惠特尼定理的一个非正式的陈述．他所证明的是：对于任一把平面上的点变换到另一个平面上去的光滑变换（即没有折痕的变换）而言，能有代表性地出现的点的类型只有正则点、褶点和尖点；只要把变换稍稍改变一点，任何其他的类型就会消失．

尽管这个结果看起来相当特殊，它只是关于平面到平面的光滑变换，但是它展示了太多的问题，因为如若有人能证明对于从平面到平面的映射能典型地碰到的点只有三种类型的话，那么人们或许也能证明关于其他类型的空间互相之间的光滑变换的类似的结果．例如，人们天天生活所在的三维空间 R^3 到实轴 R^1 的光滑变换，或者一个炸面包圈的表面，环面 T^2，到另一个环面的变换．要想了解有关这些事情的任何人的追求原因的问题也是本章的重要内容，并将在我们讲下去的过程中得到回答．如果我们有了这类信息，那么我们就能够展示会出现这些变换的标准的，即最简的，方式，并获得如下的洞察：当我们移动问题中的变量一点点时，人们声称所表达的实际现象会怎样地作出反应．

[92]

事实上，惠特尼的结果并不出乎意外．它是受启发于 M·莫尔斯[①] 1930 年关于光滑函数（而不是平面映射）的临界点的性质的早先的研究成果．莫尔斯所考虑的是通常的 n 维空间到实数（比平面要小得多的空间）的光滑变换．莫尔斯能证明：我们可以期望在这样一个函数的临界点附近该函数从几

① 译注：Harold Marston Morse，1892．3．24～1977．6．22，美国数学家，1932 年当选为美国国家科学院院士．1964 年获美国国家科学奖章．莫尔斯继承了伯克霍夫（George David Birkhoff，1884．3．21～1944．11．12，美国数学家）在动力学方面的工作，1925 年推广其极小极大原理，第一次得出莫尔斯不等式，以后形成了莫尔斯理论．他的理论总结于 1934 年出版的《大范围变分法》一书中．这一理论是把拓扑学与分析学结合成为大范围分析的开端．

何上看起来就像一个鞍点——在某些方向上弯曲向上，而在另一些方向上弯曲向下．而且他证明了在函数的任何小的改变下这样的几何保持不变，即这样的函数在如下意义下是稳定的：任何邻近的函数在所考虑的临界点的附近都给出同样的几何图象．但是在更仔细地描述这些结果之前，让我们先来看一个来自物理学的特殊问题，用以说明在非常一般的情形下莫尔斯能证明什么．

两个柱体间流体的流动

考虑如图 3.4 所示的双辊碾磨的情形．这是由置放在流体中的两个滚轴并令其按相同的方向旋转而构成的．在机械工程中，当有轴在流体中旋转时经常会出现这类问题．例如，大多数汽车发动机的凸轮轴以这样的方式和处于流体状态的汽车机油一起转动．重要的是要能够在给定滚轴的旋转速率以及像流体的粘性等性质后去计算流体中的流线，因为当流线断掉时，湍流就产生了．而且湍流的发生恰好是机油的润滑效果完全停止的时候(实际上停止！)．

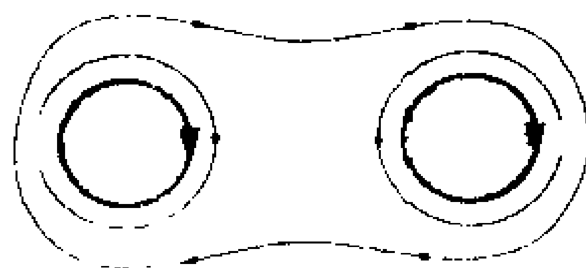


图 3.4 双辊碾磨

从图 3.4 我们看到在滚轴之间有一个滞止点，在该点流动为零．滞止点的产生是因为在滚轴之间的流体以相反的方向但相同的速度运动而造成的．因此，流体在中点的向上运动被流体 [93]

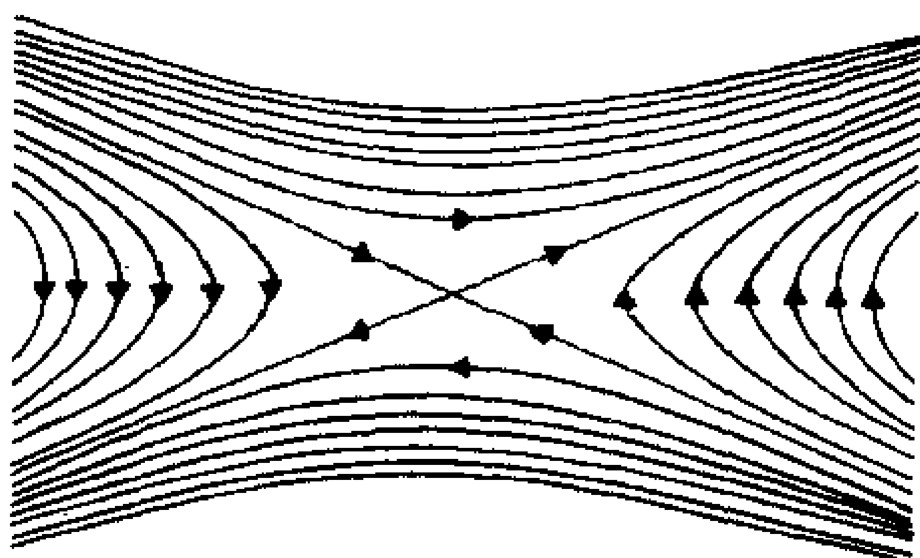


图 3.5 双辊碾磨的理论流线

在该点处的向下运动抵消了.结果表明在 $x-y$ 平面上滞止点附近的流动模式的流线可以数学地用方程 $ax^2+by^2=c$ 取不同的 c 值来表征,首先固定 a 和 b 并使之有相反的符号.这样的一组流线如图 3.5 所示.我们要指出进出滞止点的真实流线实际上是弯曲的.所以,为了把真实的流线化为图 3.5 所示的理想化模型需要作变量 x 和 y 的一个变换把通过位于图形中心的滞止点的流线"拉直".莫尔斯定理的一部分是专门用来使我们确信变量的这种"拉直"变换总是存在的.

但是即使是停留在原来的 x,y 坐标系里,简单的近似 ax^2+by^2 也近似得很好——甚至对于滞止点附近有关的流动的物理计算也很好.这种近似的成功主要应归因于以下事实:要察看的流线的标准的,或者说是典型的样式是由这个二次函数给出的.物理上讲,这是因为对于这样的(流线)形状流体的能量达到极小,这是从下面的原理得到的:每个系统都运动到它的最低能量状态,除非有其他因素阻止它这样做.数学上,这个二次函数之所以能成为最简单的模型的前提正是莫尔斯定理的直接推论,该定理说在函数临界点(在这里就是描述流体流动流线的函数的滞止点)附近,看起来像二次函数的函数是典型的.所以如果没有特

[94]

殊的约束加在流体上，那么能期望的流线看起来就像图 3.5 所示的那样．这意味着试图数学地描绘滞止点附近流动的水力工程师无须通过搜索所有可能的函数来创立流动的模型．最简单的模型早已在手——它很简单，只是一个二次函数．工程师怎么知道这就是最简单的模型呢？很容易——莫尔斯定理．

为解释为什么是这样，并为阐述莫尔斯的工作作好准备，我们必须简单地讲一下怎样数学地表示像前面所描述的双辊碾磨中的流线那样的光滑函数．每个光滑函数在给定点附近的值可以表为该函数自变量的一个无穷幂级数．例如初等三角中熟知的正弦函数在点 $x=0$ 附近就可以由级数

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

表示，其中！表示阶乘函数 $n! = n(n-1)(n-2)\cdots\times 2\times 1$．该级数使我们能计算 $x=0$ 附近 x 值处 $\sin x$ 的值的很好的近似值．通过察看这个级数的项我们就能识别要用多少项就能了解该函数在原点附近是怎样的性态的一切方面．我们将会看到莫尔斯定理告诉我们通常不需要太多的项；事实上，你无须超过二阶项，除非函数有非常特别的地方．在函数有一些特别之处时，突变论将告诉我们应该用多少项．这些理论的思想都依赖于怎样通过一种灵巧选定的坐标变换把由“…”表示的项完全消去．所以我们来看一下怎样能做到这点的论证． [95]

泰 勒 余 项

假定我们有一个单变量 x 的函数 f，它可用图 3.6 所示的光滑曲线来表示．若该曲线足够光滑（这是我们在本章的余下部分的标准的操作假定），则由初等微积分知道，对给定基点 x_0 附近的任意点 x，f 在 x 处的值可用无穷级数

$$f(x) = a_0(x_0) + a_1(x_0)(x-x_0) + a_2(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots, \quad (*)$$

来表示.其中量 $a_i(x_0)$ 是其值依赖于所选的基点 x_0(当然也依赖于 f)的实数.这个无穷级数的表示称为 f 在点 x_0 处的泰勒[①]级数,而数 $a_i(x_0)$ 称为展开系数.(插话:对熟悉微积分的人而言,这些展开系数就是函数 f 在 x_0 处的各阶导数乘上相应的常数因子.但在这里我们无须用到这个事实.)

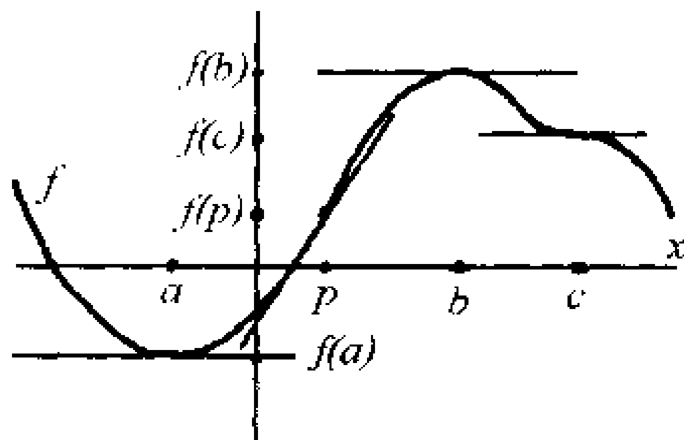


图 3.6 一个单变量的光滑函数

关于泰勒级数(*)要指出的第一件事就是它只是一种局部表示:它给出了基点 x_0 附近的点 x 处 f 的值.如果我们想要知道在远离 x_0 处函数的情况,那么必须在该远处的点的附近的一个新的基点处计算新的无穷级数.当然,这个新的级数有它自己的展开系数.

[**96**]

假定今后我们关心的是 f 在原点附近的性态,即把基点取作 $x_0=0$ 将简化我们的讨论,也将简化我们的记号.这也不会失去一般性,因为从图 3.6 可见水平移动 x 轴总可以使基点和坐标系的原点重合.类似地把表示 f 的值的垂直轴上下移动总可以使曲线 f 通过原点.这就是说我们可以取 $f(0)=0$.把这两个坐标变换,从 x_0 到 0 和从 $f(x_0)$ 到 0,合在一起,f 在原点的泰勒级数可写为

① 译注:Brook Taylor,1685.8.18~1731.12.29,英国数学家.

$$f(x)=\alpha_1(0)x+\alpha_2(0)x^2+\alpha_3(0)x^3+\cdots,\qquad (**)$$

(* *)对所有在原点附近的点成立.为进一步简化记号,我们把 $\alpha_i(0)$中的0去掉,以后我们大家都同意这表示我们关心的总是在原点附近 f 的局部行为.

现在假设 α_1 不等于零,则(* *)暗示 $f(x)$近似地等于 α_1x,因为只要 x 充分靠近0,(* *)中的高阶项可以要多小就有多小.这是因为 x 是很小的,于是 x^2 比 x 小得多,而 x^3 则更小,对于 x 的更高阶的项则更小了.因此,如果我们取一点 x 非常靠近0,则项 α_1x 将控制无穷级数的其余的项.对于这种情形,我们把原点称为 f 的正则点,因为差不多是同样的理由,折纸问题图3.2中的 a 点被称为正则点,即它们是光滑函数可以有的典型的点.图3.6中的点 p 就是这样的一个正则点.

但是,如若 $\alpha_1=0$ 又将会怎样呢?图3.6中的 b 点就可以作为这种临界点的例子,在该点附近表示 f 的曲线是"碗状的".碗的指向,指向上或指向下,是由 α_2 的符号决定的;正意味着指向上,负意味着指向下.回顾一下关于流体流动的讨论,若 $\alpha_2>0$,这样一点[1]表示了流体处于其极小能量"形状"时的构形.从这样的形状移开就要沿碗边爬上去.在这种情形,我们把原点称为 f 的非退化临界点.所以,当 $\alpha_1=0$ 时,展开式(* *)暗示当 x 充分靠近0时我们有 $f(x)\approx\alpha_2x^2$.换言之,在非退化临界点的附近函数 f 近似等于(* *)的二次项.

但也可能有 α_1,α_2 都等于零的情形.这时我们把原点称为退化临界点.图3.6中的 c 点就是这类点的图示.莫尔斯定理的一部分告诉我们这种情形是少有的;不过,确实会有的.如果有这样的点时,通常意味着随着函数所表示的物理过程的进行将会有奇怪的事情发生,例如杆的弯曲或政治革命的爆发.当 α_1,

[1] 译注:碗底的那点.

α_2都等于零时表达式(* *)表明若 x 足够小我们应有$f(x)\approx\alpha_3x^3$.如果是这样,那么 f 在原点附近的局部行为由其泰勒级数的第一个非零项来近似.

对于光滑函数,感兴趣的主要性质是在临界点附近函数的性态如何变化,因为在正则点附近函数的性态是乏味地正则.本质上就和直线(或高维空间中的平面)一样.但是在临界点处就有事情发生了,这正是函数移动到成为其局部极小或极大"转向"的地方,或者甚至会有些更奇怪的事情发生,如果这是一个退化临界点的话.所以如果我们要洞察函数是怎样由其各种不同的局部性态组合而成的话,我们就需要揭示函数在临界点附近的性态.f 的任何临界点——非退化的或退化的——称为函数的奇点.奇点理论的目标就是要使前述的关于函数局部性态的貌似有理的论证在数学上无懈可击,并把它们推广到 f 是 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的情形,而不是迄今我们所讨论的单变量的情形.

为了解为什么在拼合到函数的总体全局结构中去时,局部性态的重要性,假定我们知道光滑函数 f 的临界点位于点 $x=a$, $x=b$和$x=c$.而且假定a和b是非退化临界点,使得在a附近$f(x)\approx(x-a)^2$,而在b附近 $f(x)\approx-(x-b)^2$.最后设c

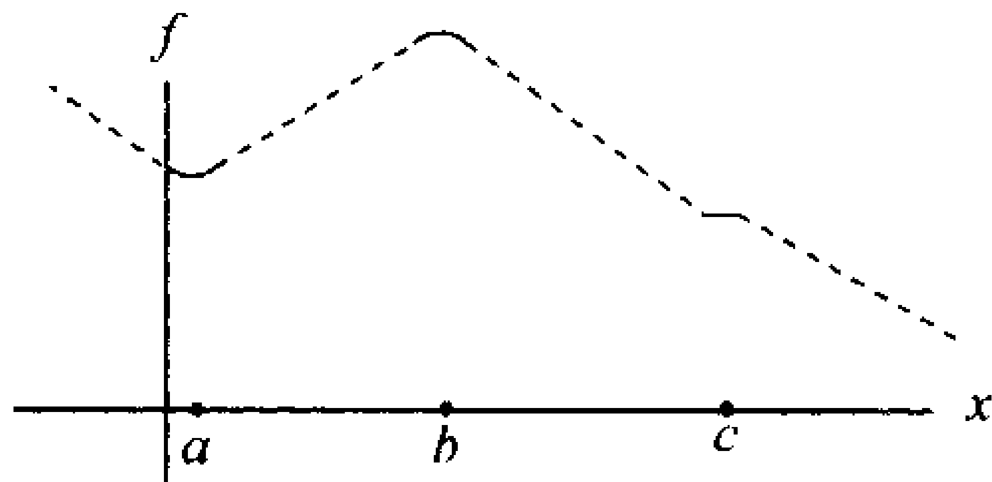


图 3.7　在三个临界点附近函数的性态

是一个退化临界点，使得在 c 的周围$f(x) \approx -(x-c)^3$. 从图形 [98] 上看就是如图 3.7所示的情形. 但是我们知道，远离每个临界点的地方函数的性态类似于直线，我们可以利用这个事实来构画出曲线的虚点部分. 因此为重建函数的整个全局性态，我们需要知道的就是在临界点附近是怎样的局部性态的信息. 奇点理论将给予我们这些信息. 为说明奇点理论怎样能帮助我们识别系统中哪些地方会发生奇怪的事情，我们来察看一下一个电力生成系统的动力学行为.

电 力 生 成

考虑由两个发电机组成的一个电力供应网. 由发电机提供的电力的一种描述是由发电机转子的角速度和它们的扭转角表示的函数

$$V(x_1, x_2) = -c + \frac{1}{2}ax_1^2 - bx_1 - c\cos x_2$$

给出，其中 x_1 是转子 1 和转子 2 的角速度之差，x_2 是两个转子的电力扭转角之差，a 是两个转子的角动量之积，b 是转子的阻尼因子之差，而 c 是两个角动量之和与两个发电机的电压之积 [99] 的乘积. 这里我们认同 V 在原点的这个临界点和两个转子运动的动态过程的平衡位置是一样的. 我们在后面将会对这种认同说得更多一点，因为它构成了突变论和动力系统的分歧理论的接触点. 在这个电力生成过程中，我们将会看到奇点理论能使我们知道能导致某地区电力供应中断(甚至可能会发生和 1977 年震动纽约城几天的断电那样的重大事情)的这些 a, b 和 c 的值的组合. 因此，我们想要知道当发电机的转子处于其平衡位置时函数 V 在原点的性态.

为分析 V 在原点这个临界点处的性质，我们把函数 V 写成一个泰勒级数. 遗憾的是，为此要懂得多一点微积分. 所以你必

须相信在原点附近 V 关于 x_1, x_2 的泰勒级数有如下的形式

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2) &= (a \cdot 0)x_1 + (-b + c\sin 0)x_2 \\ &\quad + ax_1^2 + (0)x_1x_2 + (c\cos 0)x_2^2 + \cdots \\ &= -bx_2 + ax_1^2 + cx_2^2 + \cdots. \end{aligned}$$

所以若 $b \neq 0$，则原点是一个正则点，若 $b = 0$ 而 a, c 不全为零，则原点是一个非退化临界点．若 a, b, c 均为零，则原点为一个退化临界点．当然，在后者的情形，函数 V 自己退化成为零函数．

1930 年，M·莫尔斯证明了一个关键的定理，它使我们能把早先关于单变量光滑函数泰勒级数中的低阶项等于零时能告诉我们该函数的局部性态的相当直接的结果推广到多变量函数的情形．为简单计，我们把注意力限于有限个变量的情形，尽管在适当的条件下莫尔斯定理甚至可以推广到无穷多个变量的情形．我们早就在双辊碾压问题中见过这种两个变量的函数的例子，其中系统的能量由两个空间位置的函数 $f(x, y)$ 给出．前面简单讨论过的经济实例也导致多个变量的函数，我们将在后面"事物的形状"一节中更仔细地讨论的鉴别细胞和形态学的问题 [100] 也导致多个变量的函数．

为了叙述莫尔斯定理就需要对我们所说的一个函数"看起来像"另一个函数意味着什么讲得更加确切一点．这就要求以我们在第 2 章中对闭曲面空间中引进的拓扑等价性的完全类似的方式在光滑函数类中引进光滑等价的概念．

对泰勒余项下功夫

再次考虑单变量 x 的光滑函数 f，还假设原点是 f 的非退化临界点．于是我们可以写下

$$f(x) = a_1x^2 + \text{Tayl},$$

其中"Tayl"表示 f 在原点附近展开的 f 的泰勒级数中所有的高

阶项，即所谓的泰勒级数的余项. 忽略 Tayl，即取 x 非常靠近原点. 如早就讨论过的，我们常常可以得到 f 值的很好的近似. 如果我们能使 Tayl 完全消失掉不就太好了吗? 于是我们就想要有一个 f 的精确的局部表示而不只是一个近似. 奇点理论将告诉我们怎样去掉 Tayl. 而且，这是重要的，因为可能会有如下的情形：f 的局部特征不能由其泰勒级数的任何有限项得到.

例如，考虑两个变量的解析函数，其直到次数为 17 的项的泰勒展开为

$$f^{[17]} = x_1^2 x_2 + \frac{1}{2} x_1 x_2^3 + \cdots + \frac{1}{15!} x_1^2 x_2^{15}.$$

因此在 x_1 轴或 x_2 轴上的任意点 $(x_1, 0)$ 或 $(0, x_2)$ 都是方程 $f^{[17]} = 0$ 的解. 现在假定我们已通过求第 18 次的项求得 f 的泰勒级数的更多一点的项

$$f^{[18]} = f^{[17]} + \frac{1}{18!} x_2^{18}.$$

方程 $f^{[18]} = 0$ 当 $x_2 > 0$ 时无解. 这意味着 f^{17} 甚至不足以决定 $f^{[18]}$ 的特征，更别提 f 本身的特征了. 奇点理论通过向我们证明在什么样的确切的点处函数的泰勒级数的余项可以消掉，从而确切地告诉我们为了完全描述函数的局部行为需要泰勒级数的多少项.

大致说来，其想法就是认识到坐标系是可以任意选取的. 这有点像可以用米尺也可以用码尺来量度人的身高那样. 当你用不同的尺度时你得到不同的读数. 但人的身高完全不会由于这样任意选定的尺子而改变的. 对函数也是一样. 使一个函数有别于其他函数的本质特征——其结构——是不(或者至少是不应该)依赖于我们碰巧用来表示函数时所选的坐标系的方式. 所以，如果我们把原来的 x 坐标转换为机巧地选择的新坐标系 y，也许在 y 坐标系下表示的该函数会有 Tayl = 0. 在这种情形下，

我们就可以肯定余下的项就是该函数的本质结构，而不是我们偶然地选择的坐标系里出现的人为假象. 说明怎样消掉 Tayl 并知道余下来的是什么，这几乎就是奇点理论的大部分内容了. 现在让我们来看看所有谈及的坐标变换对两个等价的函数的作用吧.

看似相似的事物

寻求一组数学对象的正确的（即有用的）等价概念完全取决于我们愿意允许对象有多大的变形而仍然认为它们是“同一的”. 对于第 2 章中考虑的闭曲面和其他的拓扑空间，我们的关注集中于除了撕裂和切割外我们想对对象做任何事情时保持不变的对象的性质，结果表明正确的等价概念就是连续性：两个对象或空间是等价的，如果可以把一个对象连续地变形为另一个对象. 但是当对象是光滑函数时情况有所改变.

我们可以扰动或变形一个光滑函数的最一般的方法之一无疑是对该函数加上一个小的光滑函数. 但是这样变形一个函数在一般性方面是走得太远了，因为这样做可以（通常就是）使临界点变为不再是变换后的新函数的临界点了. 所以我们需要更强的等价的概[102]念，一个能保持函数的临界点的性质（即退化程度）不变的等价概念. 结果表明能最好地做到这点的等价性就是所谓的光滑等价：两个函数是光滑等价的，如果存在把一个函数变换成另一个函数的一个光滑的坐标变换（用数学术语讲，一个微分同胚）.

现在值得再强调一下的是，我们关心的是函数在一个特定的临界点附近的*局部*特征而不是该函数整个的全局性态. 这意味着我们的坐标变换只需要在临界点周围的一个小邻域中起作用. 为说明其差别，图 3.8 展示了涉及两个函数 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=x^2-x^4$ 的局部等价的例子. 如果从 x 变量变换到由光滑变换

$$y(x)=\frac{x}{|x|}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2}}$$

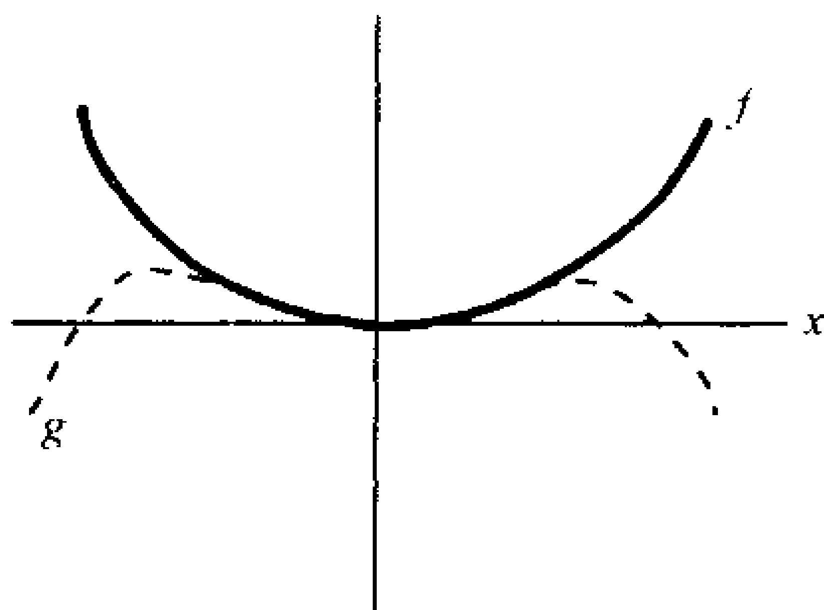


图 3.8 两个函数的局部等价

定义的新变量 y，那么 g 变换到 f，因为对临界点 $x=0$ 的局部区域中所有的 x 值都有 $g(y(x))=f(x)$. 但是没有一个光滑的坐标变换能把具有三个临界点的 g 整体地变为只有一个临界点的 f.

莫尔斯用光滑等价的概念求得了最简单的光滑函数的类型，并确定了恰好有多少类型，从而证明了任何这种函数的小的光滑变形不会改变函数的类型. 完成了所有这些后，莫尔斯的结果就能使我们来表征很大一类光滑函数的性态. 这类光滑函数有多大？是的，大到能稠密地填进由所有的光滑函数组成的集合中去. 莫尔斯定理给出了全部详情. [103]

莫尔斯定理

可以用如下的方式来设想莫尔斯定理所回答的问题. 假定我们把所有可能的光滑函数放进一只口袋，并摇晃之. 然后闭上眼睛从口袋里随机地取出某个函数. 我们可期望该函数具有什么样的性质？换言之，一个典型的光滑函数看起来像什么？为

了回答这些问题,我们把问题"拆析"为几个组成部分.

首先,一个典型的光滑函数肯定有某些临界点.为什么?是呀,因为仅有的一些没有临界点的函数就是像 tanh x 那样"凹凹凸凸"得不够致使其图形从未处于水平位置,或者像直线或指数函数那样完全没有凹凸的函数.但是这样的函数只是所有可能的光滑函数集合中极微小的部分.因此我们可以期望一个典型的光滑函数具有某些临界点.但是是什么样的临界点呢?

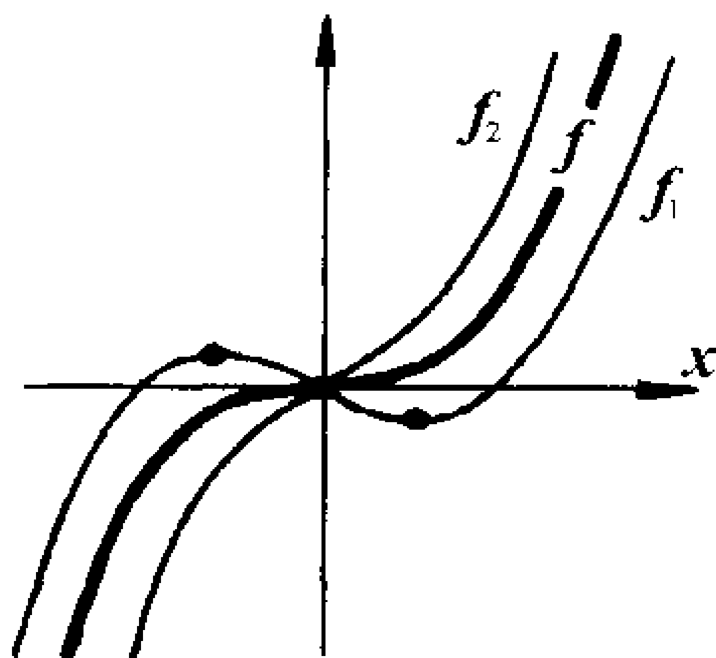


图 3.9 退化临界点的消失

如果我们拿一个放大镜来看一个典型的光滑函数在它的一个临界点附近的结构时,该临界点可能是非退化的.这意味着在放大镜下看到的图象不是一条"平坦"的曲线,而是看起来像一只碗,或者在高维情形象一个鞍面.简言之,表示函数的曲面是局部弯曲的.察看这种情形的一种方法是注意在一个退化临界点的附近函数 f 的非常小的改变可能会产生一个新函数 f_1,原先的退化临界点为两个非退化临界点所代替,或者是产生一个完全没有临界点的函数 f_2.对于函数 $f(x)=x^3$ 在原点这个临界点附近的情形如图 3.9 所示.

在现实世界里也可能会碰到这样的情形,例如,$f(x)$表示体内激素的产出率,x表示体温.假定当体温x处于或接近正常体温时产出是局部"平坦"的,我们可以通过选择度量体温的适当的尺度取$x=0$.但是实际的激素产出曲线可能不是图3.9中给出的理论曲线f,而是相近的像f_1那样的曲线.这时激素的产出会在稍小于$x=0$的体温处达到最大而在体温稍大于零时产出达到极小.另一方面,如果实际的激素产出曲线为f_2所替代的话,那么在$x=0$附近就没有极大或极小,而只是当体温增加时产出稳定增加.于是能告诉我们究竟是哪一种情形的信息就可用来决定管制激素产出的药物的剂量和时间选择.

[104]

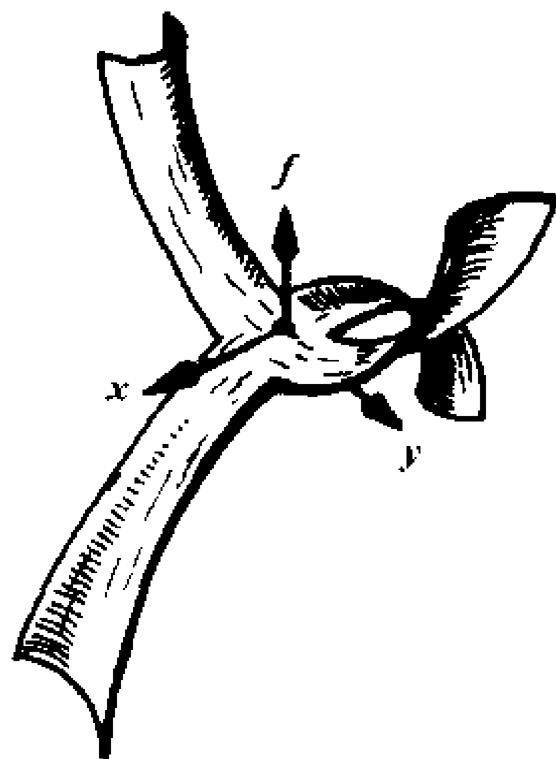


图 3.10 指标为1的两个变量的函数

如果f是一个多变量函数,那么它在一个非退化临界点附近的几何看起来像一张鞍面,因为函数的图形是一张在给定点的不同方向上可以是弯曲的曲面.因为临界点是非退化的,这张曲面必须在k个坐标方向上向下弯曲而在其余的方向上向上.

弯曲.向下弯曲的方向的个数 k(正整数)称为该临界点的指标.

图 3.10 展示了一个两个变量的函数 $f(x,y)$在临界点附近的情形,我们看到在 y 方向向上弯曲而在 x 方向向下弯曲. [105]

最后,我们来考虑一个典型的函数在它的临界点处的取值,即所谓的临界值.一般说,我们可以预期这些值是不同的.理由如下:如果一个函数有两个相等的临界值,那么函数的一个任意小的扰动将产生一个临界值不同的新函数.读者可以通过把函数想象成一系列山脉的高度就容易明白这点.如果察看山脉的轮廓外形,山的坡度和山峰就构成了一个函数的图形.如果两个山峰恰好高度相同,只要用镐头对其中一个山峰做很少一点劳动就可以使两个山峰的高度相差一小点.同样易见,轻轻摇动有两个不同临界值的函数就可以得到一个仍有两个不同临界值的函数.所以,在函数的微小变化下具有不同临界值的性质保持不变.

这些论证使得以下断言貌似有理:即具有非退化临界点的函数的小的光滑扰动将产生一个具有同样性质的函数.同样清楚的是一个"坏函数",即具有退化临界点和/或相等临界值的数学上更复杂的函数的类似的微小光滑扰动将产生一个没有这些解析缺点的函数.前面图 3.9 中关于函数 $f(x)=x^3$ 的图示说明了为什么会这样.把函数的图形设想为一根橡皮筋,在一处压下一点在另一处拉上一点,一个退化临界点,就像在原点处的临界点(在该处函数是平坦的)可以给出小的"驼峰"从而把该临界点化解为两个临近的退化临界点.或者用不同的压下和拉上,函数可以变换成完全没有临界点的函数.类似地,如果两个临界值相等,那么为使它们不同,所有要做的事就是只要把其中一个临界点处的图形略为往下拉一点. [106]

记住这些直观的几何想法,现在考虑只有非退化临界点的光滑函数.这样的函数称为莫尔斯函数.我们有

莫尔斯定理　*在由所有的光滑函数构成的集合中莫尔斯函数是稳定和稠密的.而且,在指标为 k 的临界点附近存在一个光滑的坐标变换,在新坐标系下得到的莫尔斯函数 f 在原点附近的泰勒级数是纯二次形*

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \cdots + x_n^2.$$

换言之,在该坐标变换下 f 的 Tayl 消失了.

定理的第一部分说,莫尔斯函数的一个小的光滑扰动给出另一个莫尔斯函数.因此,所有充分靠近一个莫尔斯函数的函数都是莫尔斯函数.稠密性的结果意味着对任何非莫尔斯函数,即像具有退化临界点的 $f(x)=x^3$ 那样的函数,都存在一个任意靠近该非莫尔斯函数的莫尔斯函数.定理的最后部分说,在临界点附近存在一个光滑坐标变换把函数 f 变为鞍面,而且鞍面的确切性质只由该临界点的指标 k 唯一决定.

上述莫尔斯函数的局部稳定性结果可以通过加上临界值不同的这个附加条件而改进为全局的结果.满足这个条件的莫尔斯函数是全局稳定的,意即定义在整个空间 R^n 上的 f 的一个小的光滑扰动给出另一个具有不同临界值的莫尔斯函数.这和局部扰动的情形形成对照,正如早先在图 3.8 中所说的局部扰动可能只是定义在 R^n 中包含单个临界点的一个小区域上.　[107]

初一看,莫尔斯定理好像彻底回答了我们能对光滑函数期望什么的问题,因为该定理告诉我们任意一个光滑函数可由一个莫尔斯函数,我们想要多靠近就多靠近地来逼近.该定理甚至给出了每个莫尔斯函数在其临界点附近的完整的图象.而且,我们知道这正是为重建函数的整个性态所需要的全部信息.所以,在这个意义下该定理确实彻底回答了有关光滑函数的局部性态问题.但是在另一种意义下这仅仅是开始,决非终结,即,它激励我们去问怎样能把莫尔斯定理推广到更一般的情形.结果表明

为寻求这种推广有几个有趣的方向.

●光滑映射：莫尔斯定理只能用于光滑函数以及变换取值只是实数的情形.但是对于像在惠特尼定理中映射的取值是在二维平面而不是实数的那种光滑映射，情况又将如何呢？甚至更一般地映射取值在像 R^p, $p>2$ 那样的更高维的空间时又将如何呢？这种取值在比实数更大的空间上的映射开启了能展示比仅仅是函数所能展示的要更加变化多样的性态的可能性.我们在本章开头那节中概述的惠特尼定理给出了平面到平面的映射可能会碰到的相当完整的图象.但是对于 $p>2$ 时从 R^n 到 R^p 的一种合宜的一般理论还只是个愿望.

●退化临界点：莫尔斯定理也只能用于莫尔斯函数，按定义说是只有非退化临界点的函数.因为我们已经看到一个退化临界点总可以通过对原来函数的一个小的“轻摇”而变为一个非退化临界点，看来没有专门用来关注这些不稳定情形的令人信服的理由；永远可以用一个我们想要多小就能多小的扰动把退化临界点扰动掉.这都是真的.但是有许多方式来扰动一个函数，实际上可以有无穷多种扰动方法.所以要问的有意义的问题 [108] 是最简单的能去掉退化性的扰动类型是什么.甚至还可以问能把有退化临界点的函数嵌入进去的最简单的函数族是什么，以致如果我们轻摇一下作为整体的该函数族得到的新函数族将保持其临界点的性质.换言之，我们要找的是能把退化函数“隐藏”在其中的整个函数族使得该函数族本身是稳定的(这听起来有点像三流的电视肥皂剧，不是吗?).

为说明这里的问题所在，考虑一个捕食者——食饵生态系统，其中捕食者的种群数为 x，而食饵的种群数为 y.假定这两个种群都依赖于食饵的出生率，我们把它记为 a，还依赖于捕食率，我们把它记为 b.那么在该生态系统中总的生物量可以用函数 $V(x,y;a,b)$ 来描述.我们可以假定原点是 V 的一个临界点.固定 a,b 的值我们对生物量确定了一个特殊的数学模型.

但是对参数 a, b 的某些值原点这个临界点从非退化临界点变为退化临界点. 从而, 这也改变了 V 的局部性态——或许是显著地改变. 极有兴趣的是想确切地知道当 a 和 b 通过这些敏感值时生物量的改变是怎样发生的. 这正是把函数 V 放进光滑函数族中去的想法起作用的地方.

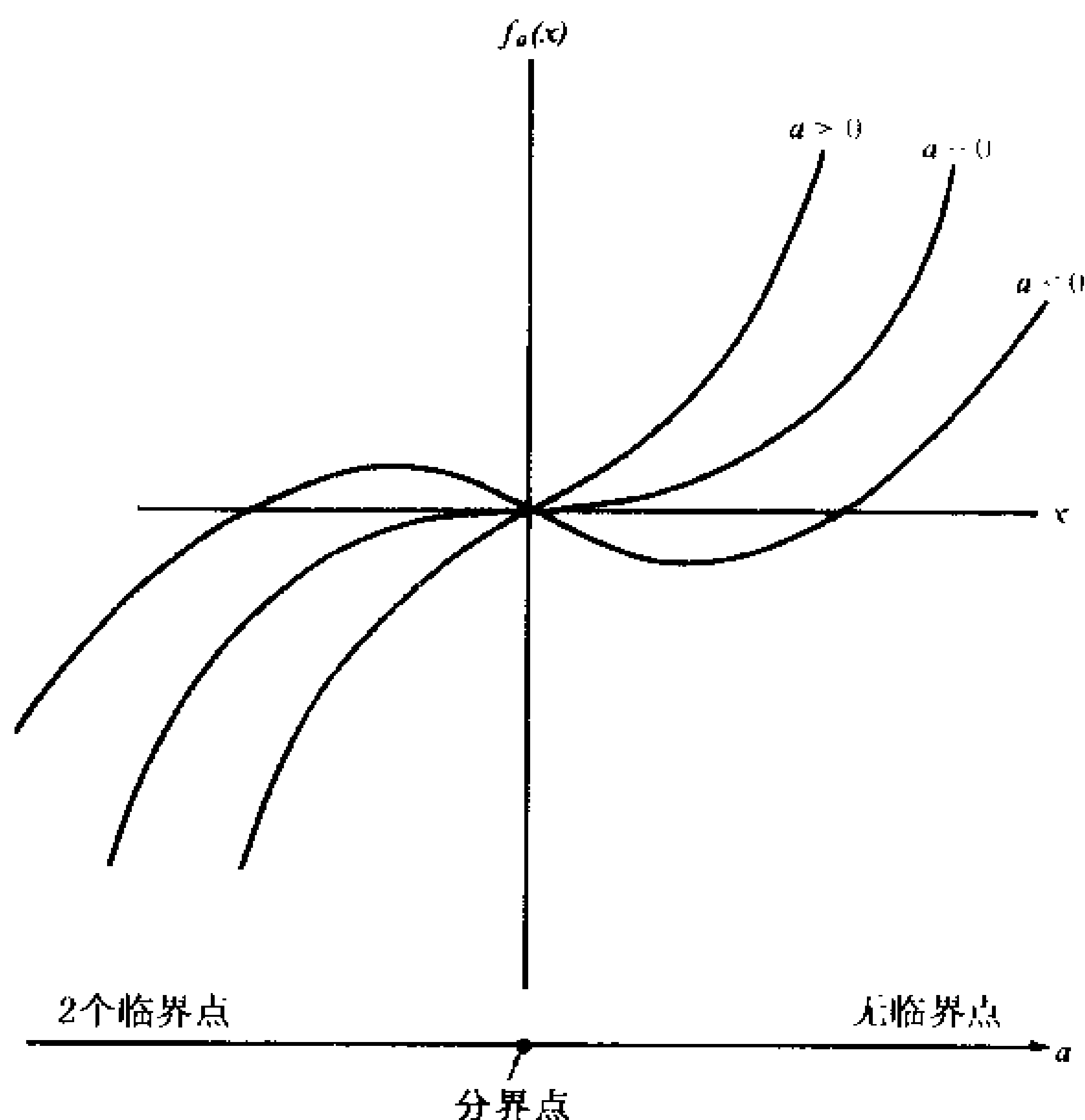


图 3.11 函数族 $\frac{1}{3}x^3 + ax$

让我们几何地来看看这种情形, 再次考虑函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3$.

我们可以把 f 看作是函数族 $f_a(x)=\frac{1}{3}x^3+ax$ 中的一员，其中 a 可以看作为该族成员的标记或“名字”. 该函数族如图 3.11 所示. 所以原先的退化临界点出现在该族中，就是“名字”为 $a=0$ 的成员，当 a 为负时所有族中的其他成员只有一对在 $x=\pm\sqrt{-a}$ 的非退化临界点，当 a 为正时没有临界点.

不存在作为整体的该函数族的光滑变换能从该族中去掉退化性. 从这样的扰动所产生的新族中有一个成员会精确地展示同样类型的退化临界点. 但是我们不久就会知道奇点理论能使我们确信 $\frac{1}{3}x^3+ax$ 作为整体的族是稳定的. 这意味着如果我们把它变换到邻近的另一族，那么两族都含有具同样临界点结构的函数. 而且，这就是把不稳定成员 $\frac{1}{3}x^3$ 包括在内的最简单的

[109] 函数族(在要求用最少的常数参数来命名其成员的意义下，具体说来现在就是用一个参数). 由此，我们看到作为整体的一个族而言它可以是稳定的，即使该族有一只作为个体而言是不稳定的“害群之马”.

刚才叙述的情景在遍及所有科学领域中的(数学)建模过程中是经常会出现的情形，因为当所研究的过程包含任何常数(用术语讲叫参数)时，对常数需要设定的值完全说明了该过程，这时就自然地出现了函数族. 例如，当我们考虑化学反应器或者生态学中的捕食者——食饵系统中的流时就有诸如反应常数或捕

[110] 食者出生率和死亡率那样可以变化的量. 固定这些参数，我们就挑出了模型函数族中的特定一员. 又若该族中甚至有一个函数具有退化临界点，它可能相当于生态食物链中断掉的地方或流体流动变成湍流的地方，不可能通过对该族的扰动来消除这种退化性. 这时，我们不得不来讨论当我们从包含这个“坏”函数的函数族成员经由附近的“好”函数移动时系统的性态是怎样变化的. 能使我们这样做的莫尔斯定理的推广就是奇点理论的一个

分支,在科普读物中称之为突变论.

突变论的目标就是对具有退化临界点的光滑函数进行分类,就如同莫尔斯定理给出了莫尔斯函数的一个完全分类一样.当然,困难在于临界点"变坏"的方式远比"使临界点保持为好"的方式要多得多.对具有退化临界点的函数进行分类更为困难,而且不可能对所有可能的退化性彻底地进行分类.尽管如此,有幸的是我们可以对那些具有不太坏的临界点的函数得到部分的分类.这种分类的结果表明把这样的结果应用于例如像前面概述过的捕食者与食饵系统那样的很广泛的一类现象中去是足够了,当描述过程的参数稍有改变时,该系统的生物量就可能发生"跳跃".

这个分类是重要的,因为它告诉我们当改变描述函数族的参数时一个非退化临界点可以变为退化临界点的不同的方式.反之,这种信息使我们能识别在哪些参数的组合值处系统可能展示其性态的不连续的改变——破裂,爆发,倒塌.这正是突变论应用价值之所在.所以让我们来看看突变论是怎样起作用的.

托姆分类定理

我们现在关心的是非莫尔斯函数的那些光滑函数的性态,我们可以把这些具有退化临界点的函数称为"坏的"光滑函数.对这样的函数可能展示的性态的类型进行分类的关键在于要想出一种度量函数实际上有多坏的方法.大致说来,有两种不同的(但并非完全独立的)方法来度量函数坏的程度.第一种方法需要决定临界点的退化程度.称为函数的余秩(corank)的这种度量是加在该函数的泰勒展开的二次项上的条件.n 个变量的函数有$\frac{n(n+1)}{2}$个二次项,而余秩度量了这些项互相独立的程度.这些项愈是独立,临界点的退化性愈小. [111]

第二种坏的程度的度量是量化要使该函数成为莫尔斯函数的话还有多远.这种度量称为余维数(codimension),它是从该函数的泰勒展开的一次项计算得到的一个整数.n 个变量的函数有 n 个一次项,而余维数与对这些量的依赖程度有关.

回忆一下,对一个 n 个变量的莫尔斯函数来说,临界点的指标 k 只是坐标方向的个数,函数在这些坐标方向的局部曲率为负,而余量 $n-k$ 是具局部正曲率的坐标方向的数目.在单变量函数的情形($n=1$),在一点处泰勒级数的二次展开系数为零就意味着该函数在该临界点是局部"平坦"的.类似地,对一个 n 个变量的函数余秩度量了在坐标方向上是平坦的坐标方向的数目.特别是,对莫尔斯函数来说可能没有这样的方向,因为临界点都是非退化的.用代数的语言来说就是在非退化的临界点处余秩为零.当然,平坦的方向愈多,临界点的退化性愈高.这就是余秩度量临界点退化性的方法.那么余维数又怎样呢?

几何上,我们可以把光滑函数空间看成是一个无穷维空间,在原点附近它的坐标方向可标记为 $1, x, x^2, x^3, \cdots$.所以,如果我们有一个非莫尔斯函数的光滑函数,我们就可以问:需要加进该非莫尔斯函数而使之成为莫尔斯函数的最小数目的独立项数(即在光滑函数空间中的"方向"数)是多少的问题.这个数目就是余维数.另一种思考方法就是去寻求能包含(用数学术语讲,[112] 嵌入)非莫尔斯函数的最简单的稳定函数族.这里"最简单"再次意味着描述该函数族所需要的最少的参数的数目.也已证明这种参数的个数等于余维数.

为说明这些概念,再次考虑最简单的函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3$.(回忆一下,非莫尔斯函数没有一次和二次项.)我们已经知道这个"坏"函数可嵌入到稳定的单参数函数族 $f_a(x)=\frac{1}{3}x^3+ax$.所以,f 的余维数为1,因为为了创造一个把这个"坏"函数嵌入的稳定函数族只需要加一项 ax 就行了.而且,易见在原点这个临

界点处的余秩也是1,因为单变量函数至多有一个平坦的方向(这个函数确实有一个平坦的方向).

有幸的是,所准备好的数学体系使得这两个量——余秩和余维数——就是为了完全表征和描述不太坏的非莫尔斯函数所需要知道的全部量.托姆分类定理所做到的就是证明了在做了适当的光滑变换后只有很少的有限个不等价的非莫尔斯函数.而且为描述这些"标准的"非莫尔斯函数中的每一个函数都只需要知道该函数的余秩.此外,托姆的结果还给出了我们能把非莫尔斯函数放进去的最简单的稳定函数族的显式表示,该函数族可以通过原来的非莫尔斯函数的余维数来描述.

这个关键结果首先由R·托姆[①]在1960年代猜到的.完全的证明后来由J·玛瑟(John Mather)基于B·玛尔格朗热(Bernard Malgrange)的关键工作的基础上给出的.俄罗斯数学家V·I·阿诺尔德(V. I. Arnold)大大地推广了原先的结果,而C·泽曼,T·坡斯顿(Tim Poston),I·斯图尔特,M·贝里(Michael Berry)和许多其他人等广泛研究了与托姆分类定理的应用有关的各种问题.所以,在一种非常实在的意义下,尽管托姆分类定理理所当然应该归功于托姆,但实际上是一大群数学家的劳动成果,而且托姆分类定理还展示了基本数学的进展是怎样在国际性的集体努力下一部分一部分地集成起来的一个有代表性的例子.

回顾一下莫尔斯定理告诉我们在非退化临界点附近所有的莫尔斯函数都等价于一个纯二次函数.显然,因为二次函数本身特有的性质使之属于没有退化临界点的函数的范畴,只有三次和更高次函数才可能具有这种坏的临界点.托姆发现如果我们只限于讨论余维数不大于4的这类坏函数,那么就可以对这个 [113]

① 译注:René Thom,1923.9.2~,法国数学家.因代数拓扑与微分拓扑、奇点理论等方面的突出成就于1958年获菲尔兹奖.

非莫尔斯函数的光滑函数组成的子集进行分类.

托姆分类定理 除了差乘上一个常数和加上一个非退化的二次型外,余维数小于或等于4的非莫尔斯函数在原点附近光滑等价于表3.1列出的标准型之一.

读者可能首先注意到表3.1中标记为"函数"的列中列出的只是单个或两个变量的函数.这看起来有点奇怪,因为我们要讨论的是 n 个变量的函数.其原因是出自一个称为分裂引理的数

余秩/余维数	函数	通有开折	名称
1/1	y^3	$y^3 + a_1 y$	折叠型
1/2	y^4	$y^4 + a_1 y^2 + a_2 y$	尖点型
1/3	y^5	$y^5 + a_1 y^3 + a_2 y^2 + a_3 y$	燕尾型
1/4	y^6	$y^6 + a_1 y^4 + a_2 y^3 + a_3 y^2 + a_4 y$	蝴蝶型
2/3	$y_1^3 - 3y_1 y_2^2$	$y_1^3 - 3y_1 y_2^2 + a_1(y_1^2 + y_2^2) + a_2 y_1 + a_3 y_2$	椭圆脐点型
2/3	$y_1^3 + y_2^3$	$y_1^3 + y_2^3 + a_1 y_1 y_2 + a_2 y_1 + a_3 y_2$	双曲脐点型
2/4	$y_1^2 y_2 + y_2^4$	$y_1^2 y_2 + y_2^4 + a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_1 + a_4 y_2$	抛物脐点型

表 3.1 光滑函数的托姆分类

学结果.该结果说:在变量 x 到一组新变量 y 的一个光滑变换下原来的非莫尔斯函数"分裂"成两部分,所以我们可以把 $f(y)$ 写成 $f(y) = p(y) + Q(y)$.而且出现在函数 p 中的 y 变量的个数等于原来函数 f 的余秩,而其余的变量只包含在分裂出来的 Q 中.最后,分裂引理说 p 是一个三次或更高次的函数,而 Q 是一个纯二次函数因而不包含原来函数 f 的退化性.所以变到变量 y 后使 f 成为非莫尔斯函数的全部退化性都集中到分裂出的第一部分,函数 $p(y)$ 中去了.所以为了书写简便,表3.1展示的只是 f 的退化部分而略去了二次部分 Q,读者应把它们增添到每种情形中去.

表3.1中标记为"通有开折"的列展示了作为一族函数而言是稳定的而且包含该非莫尔斯函数为一员的最简单的函数族.这些称为开折的函数族由实数 a_1, a_2 等标记.从表3.1我们看到极小参数族中参数的个数等于函数的余维数.表3.1最后一列的名称来自当 [114] 把函数族看作参数 a_i 的函数时画出的图形的样子.当我们经由变动其参数来变动这些函数族中的一族时将发生的事情正是"应用"突变论的专门主题,也正是我们要转而去讨论的事情.

附带说一下,如果你想知道为什么托姆分类定理就停止在余维数为4的函数,原因就是当余维数更大时分类不再是有限的了:于是有无穷多个等价类.然而,就应用而言,最重要的就是这个有限的、低余维数的分类.而且我们可以把它看作是数学之神赐予的礼物,这样的分类毕竟对低余维数的函数是存在的.

突变论得到的,就像在1970年代中期它确实得到的,如此多的广受欢迎的报刊评论的最重要的原因大概不是因为它的无瑕可击的数学上的精美,而是因为它似乎提供了一个条理清楚的数学框架,在这个框架内可以讨论不连续跳跃的性态——例如股票市场的崩溃和爆裂或者细胞分化——怎样可以作为系统输入——例如投机市场中的利率或发育胚胎中化学物质的扩散率——的光滑变化的结果而出现.这类变化常常称为分歧,它在 [115] 应用数学建模中起着重要的作用.突变论能使我们更清楚地理解分歧是怎样发生的,以及为什么会发生.

突变论能告诉我们有关系统性态的这种突然变化的原因就在于我们通常是在动力系统处于或靠近其定常态(或平衡)位置时观察该动力系统的.而且在关于该系统的运动动态规律的性质的各种假定下,系统所有可能的平衡态的集合只不过是与该动力系统密切有关的一个光滑函数的临界点集合.当这些临界点都是非退化的时候,就可以应用莫尔斯定理.当临界点是退化临界点时完全有可能从一个临界点突然移动到另一个临界点.托姆分类定理告诉我们这种转移何时会发生以及在什么方向上发生.现在

我们对来自工程力学的一个重要例子来说明这一断言.

桥　和　杆

在时速40英里的大风下,连接美国华盛顿州大陆部分和奥林匹克半岛的开通还不到四个月的塔科马海峡桥在1940年11月7日晨因主跨断裂而掉入皮吉特海湾.由于该桥的倒塌,使该桥得到了历史上最重大的工程失败之一的臭名.对该桥倒塌的事后分析表明长为2 800英尺的主跨进入了一系列的挠曲振动,其振幅不断增大直到这些卷曲撕裂了几根已经松动了的悬索,这时主跨断裂并掉入海中.读者可以从图3.12中感受到这个著名的灾难中桥所遭受的力,该图展示了该桥断裂前不久主跨被扭曲得像一条发疯的蛇.尽管塔科马海峡桥的灾难被归因于动力学共振——在动态过程中的一种分歧,但是突变论可以帮助我们来分析与圆柱状杆的弯曲、断裂和塌坍有关的类似的静态的情形.

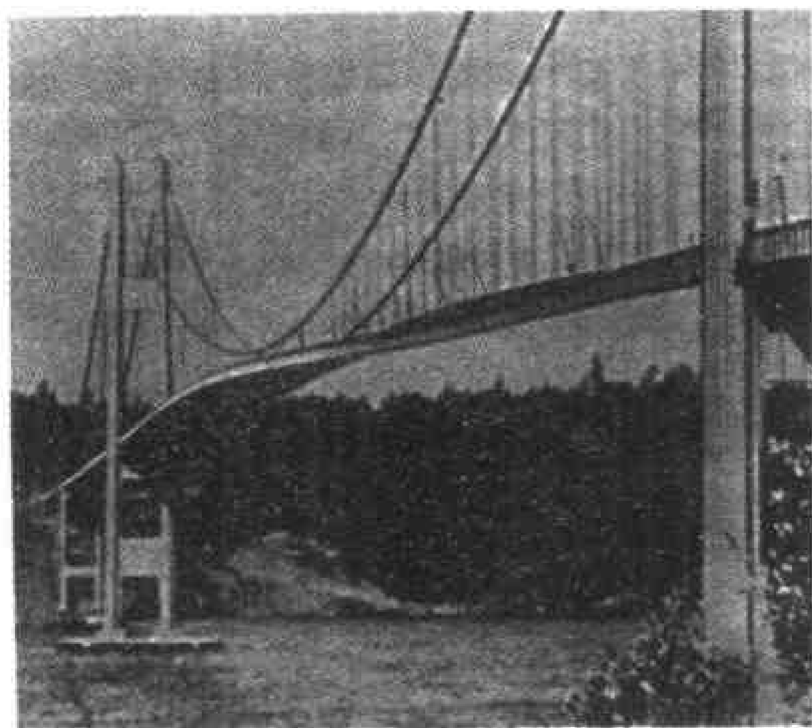


图 3.12　塔科马海峡桥的倒塌

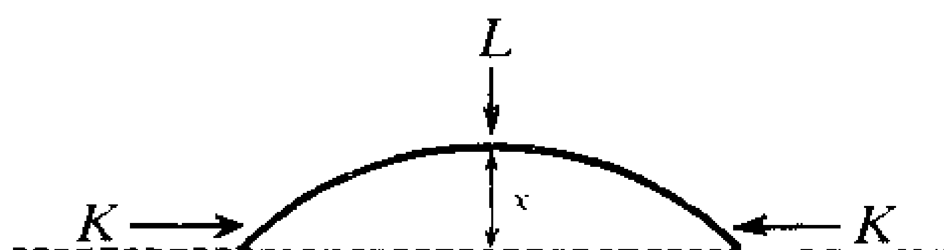


图 3.13　弹性压杆

假定我们有一根长为 l 的弹性压杆，在其两端各受到外力 K 的作用。当 K 增加时就会造成杆向上或向下的压弯，由于制造上的缺陷这时杆的内在对称性将被破坏。如果杆弯向上面且我们同意用量 x 来度量弯曲的总量，如图 3.13 所示。[116]

现在我们假定荷载 L 作用在压杆的中心。于是位移 x 会连续地变小直到荷载达到一个临界值，在该临界值处压杆会突然从弯向上跃变为弯向下的状态。突变论使我们能研究当光滑地改变两个参数 K 和 L 时这种不连续的转移。图 3.14 展示了各种可能性。

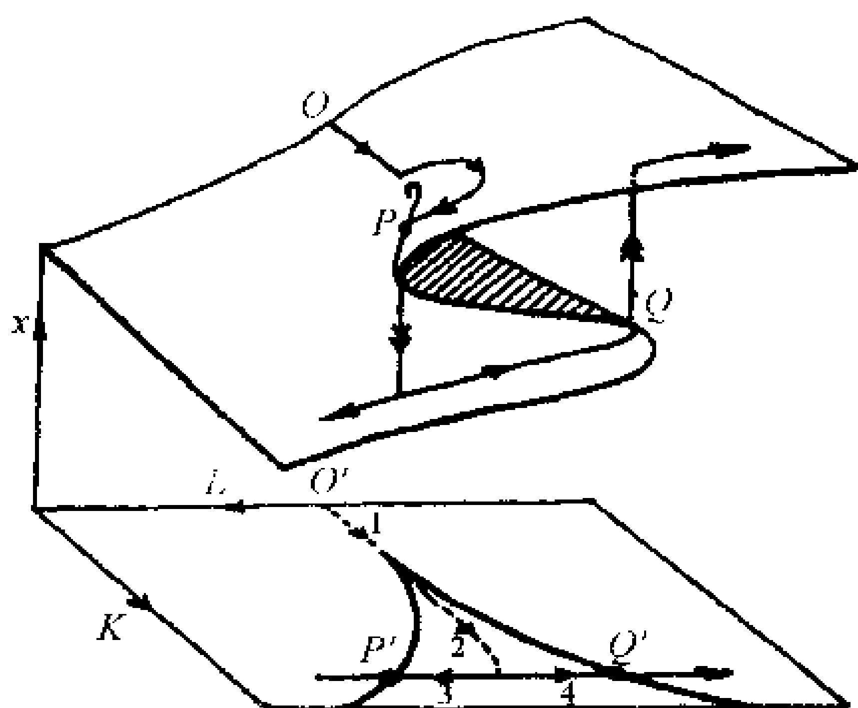


图 3.14　压弯的杆的几何

一开始，杆处于未弯曲的状态($x=0$).当两个参数沿图 3.14所示的编号路径变化时，压杆以如下方式改变其性态：当 K [117] 增加到尖点之前时，什么也不会发生，随后压杆开始向上弯曲. 200多年前瑞士数学家L·欧拉[①]证明了当 $K=\frac{\pi^2\lambda}{l^2}$ 时就会发生这种情形，其中量 λ 是压杆弹性的度量.当 K 沿路径2进一步增大时压杆弯曲得更厉害了.现在如果我们固定 K 不变而沿路径3增大 L，那么位移逐渐减小直到 P' 时它就跳到与猛弹到向下弯曲状态相应的性态曲面的另一页上去了.如果荷载 L 沿路径4减小，则弯曲总是连续地变化，而压杆则仍呆在经过点 P' 的向下弯曲的状态.换言之，直到它达到 Q' 之前仍呆在上部曲面上，达到点 Q' 时它突然弹到向上弯曲的状态.

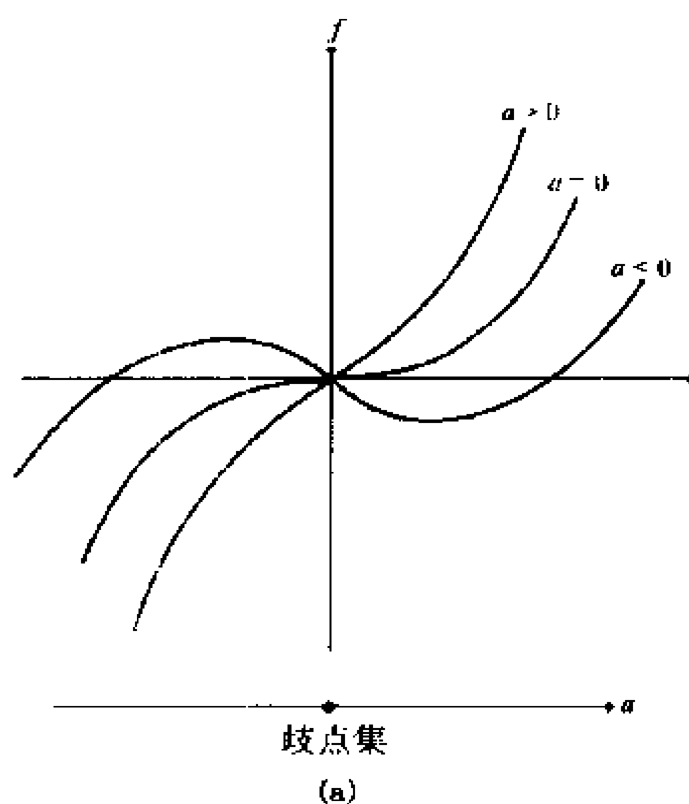
你大概理所当然地会问：我们怎么知道图3.14所示的几何是正确地描述了这种情形呢？回答最终要由表征杆的总能量的函数的确切的数学表达式来决定.对这个能量函数的细节有兴趣的读者可请教文献目录中列出的材料.经典力学告诉我们杆总是设法移动到能极小化其总能量的状态去.因为能量的表达式定义了一族函 [118] 数，族中的每个函数由两个参数 K 和 L 的特定值来识别，我们得到了一个双参数的函数族.现在我们来看托姆分类定理怎样能使我们断言这是一个余维数为2而余秩为1的标准函数族.反之，这也使我们能断言图3.14所示的几何确实是决定杆的性态的几何.

分歧、突变和平衡点

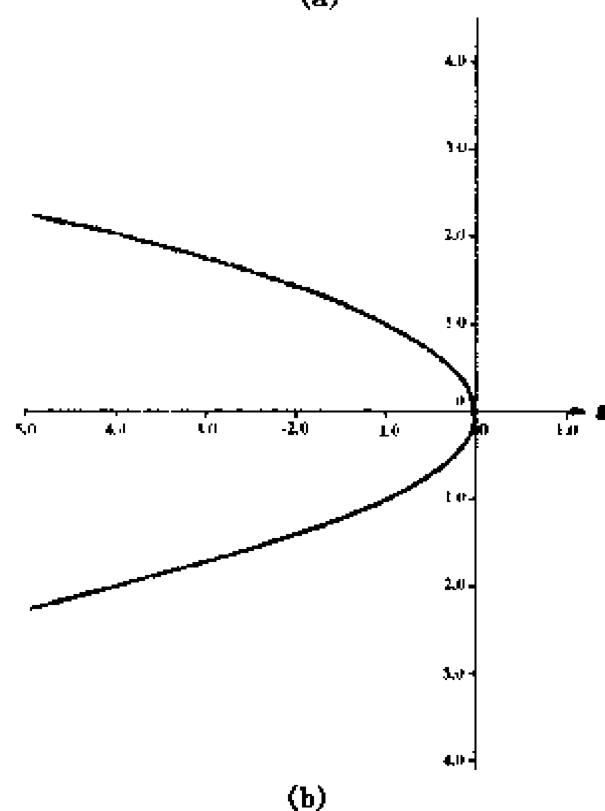
前面图3.11中的函数族 $f_a(x)=\frac{1}{3}x^3+ax$ 表明当我们连

---

① 译注：Leonhard Euler，1707.4.15～1783.9.18，是18世纪数学界最杰出的人物之一，他不但在数学上作出了伟大贡献，而且把数学用到了几乎整个物理领域.他的全集将有74卷.



(a)



(b)

图 3.15 函数族$\frac{1}{3}x^3+ax$的分岐图解 [120]

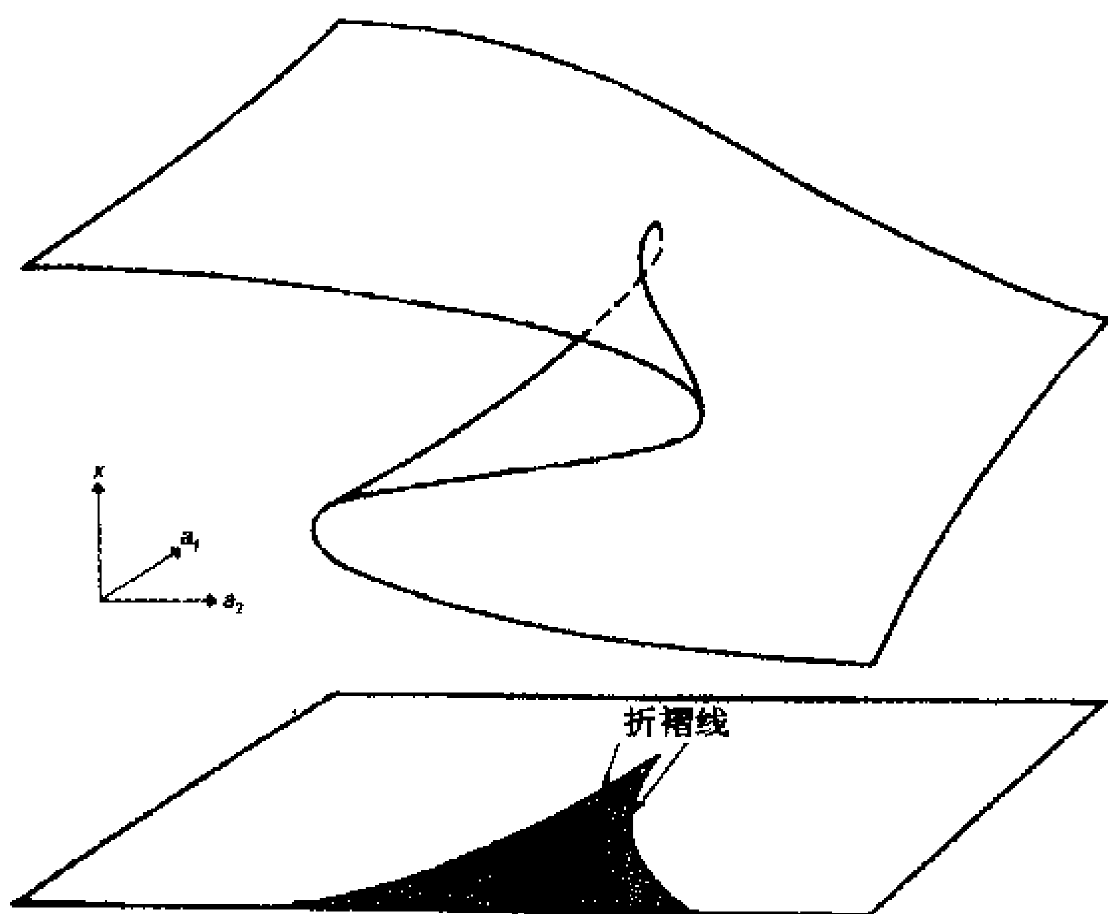


图 3.16 函数族$\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}a_1x^2+a_2x$ 的分歧图解

续改变参数值 a 而历遍该函数时，我们会从具有两个非退化临界点的函数变动到没有临界点的函数，其分界线就是函数$\frac{1}{3}x^3$，它在原点有一单个的退化临界点．使函数族的临界点的结构发生变化的参数值称为歧点．这种点在应用中特别重要，因为临界点结构的这种改变常常相应于该函数所表示的物理过程中某种剧烈的变化．图 3.15(a)展示了上述的三次函数族，而(b)则展示了该函数的分歧图解．对于(b)的图形中负的 a 值的曲线的上、下分支正是作为参数 a 的函数的非退化临界点的位置所在．正是这条曲线的形状给出了这类退化临界点类型的术语"折叠型"．从这个图解中我们看到两个非退化临界点是怎样融合为在 $a=0$ 处的单个的退化临界点的，当我们继续经由正值的 a

而变动该函数族时,那就根本没有临界点.

当我们考虑双参数函数族时情况甚至会更加有趣.图3.16展示的这类标准函数族就是四次函数族$\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}a_1x^2+a_2x$.该函数族的分歧图解如图3.16所示.图形上部卷曲的曲面对该函数而言起着图3.15两条曲线起的同样的作用,现在的曲面上的每个点表示与参数值a_1和a_2相对应的函数族的一个临界点.以下事实极为重要,即在二维参数空间中使临界点的个数有改变的点构成的集合是一对曲线——折褶线——而不是前面讨论过的单参数族中单个的点.如图中所指出的,对于位于由这两条曲线围成的阴影区域中所有的点函数都有三个临界点.在折褶线上,临界点中的两个融合为一单个的退化临界点,而在两条折褶线相交的尖点处有一个余秩为2而不是1的单个的退化临界点.最后,在阴影区域的外面,族中的函数有一单个的非退化临界点.对这类余秩为2的退化临界点的名字"尖点"也是来自于参数a_1,a_2空间中分歧线的几何. [119]

比较一下图3.15和图3.16,反应敏锐的读者可能会注意到图3.15中的曲线和从图3.16的曲面沿固定值$a_1<0$截出的曲线显著相似.事实上,图3.15的图解只是图3.16的一个子图解.而且对于余秩给定的所有函数都是这样:每个分歧曲面都作为适当的子集包含在余秩相同而余维数更高的函数的分歧曲面之中.要把包含三个或更多参数的函数族的相应的图解作为一个整体画出来就更困难了.但是要写出它们的代数表示式却没什么问题.当我们这样做时,结果表明这种函数族的分歧图解包含了我们在含有较少参数的函数族中看到的所有分歧类型,而且由于更高的余维数创造的自由度打开了许多新的分歧类型的可能性.有兴趣了解一部分这样的高维曲面的几何的读者可以查阅文献目录中列出的有关本章的材料. [121]

参数空间中的点、曲线和曲面——临界点的结构在该处发

生变化——称为突变点，源起于把临界点和物理解释联系起来的一个术语.在讲了这个注解后我们终于到了我们的故事叙述的关键之处，该把我们的注意力转向为什么这些奇点及其分歧结构在自然和人类的事务中都是如此重要的问题上去了.

迄今为止，我们多半是用数学的术语来思考光滑函数的临界点的，它们只是函数达到极小、极大或更复杂性态的地方——简言之，作为函数的性态会发生"某些有趣的事情"的点来讨论的.但是可以有其他的方式来看待这些点，与数学家的看法相比之下是一种与物理学家和生物学家更为意气相投的看法，一种展示怎样把奇点理论和动力系统理论联系起来的观点.这就是把临界点看成是动态过程的平衡点，即在该点处动态过程停止不动了，而且除非有系统外的力量使之扰动离开该点，系统将始终停在该点.当然，只有特殊类型的动态过程才会有对它们的长时间趋势性态的这类确认，即，这些动态过程只把点作为其长时间趋势的性态，而不是像周期轨道或混沌轨道那样更复杂的结构.特别是，我们在这里只考虑那样一些动态过程，其平衡点正[122]好和一个光滑函数 f 的临界点重合.加上这些条件后我们就能用奇点理论来分析当我们改变描述系统的参数时系统的平衡态怎样改变.这样的动态过程称为*梯度系统*.

初一看，这种系统似乎构成了一类非常特殊的过程.事实上，情况确实如此.但是自然界就像是有神助似地生产出来的事物使得人们实际上关心的许多过程恰好属于这种类型——包括许多像无源的电路、阻尼振动的弹簧和弯曲的杆那样的经典物理中的系统.而且，当我们观察这类实际生活中的过程时，我们看到的正是处于或靠近平衡点时的过程.正因为这些原因，在理解当像弹簧常数或失业率这样的参数只有一小点改变时为什么这类系统会突然从一个平衡态转移到另一个平衡态的问题时突变论会有很大的帮助.所以要把注意力从纯数学的考虑中转移出来，来察看一下这类在起作用的应用分析中的某些例子.不

过，先要作一点小小的告诫.

局部有多局部?

突变论是一种局部理论.它告诉我们在临界点的一个小邻域中函数看起来像什么；它一点也没有说及远离奇点时函数将会怎样.但是该理论的大多数应用——包括本章中的应用——都涉及到把这些可靠的、局部的结果外推到在时间和空间上远离奇点的地方去.所以局部有多局部？究竟能从临界点往外走多远托姆分类定理提供的局部结就不能再用了？一般说没有明确的数学回答.为了满意地回答这个问题，数学建模者应求助于建模的基本原理而不是建模中的数学.

当我们考察建模文献时，其中最突出的方面是"不很深奥的"线性模型的主导地位.为什么会这样呢？从奇点理论的观点看来这些线性对象在数学上毕竟是罕见的.站在数学的立场上肯定不会认为这些线性对象会成为现实的可靠表示.但是，它们就是这样.理由很简单：线性是能导致数学上易于处理的模型的一种中性的假设.所以，除非有好的理由不作线性假设，为什么不用线性模型呢？

[123]

当建模过程显然是由系统分量间的非线性关系控制时，我们可以求助于同样的一般思想.微积分告诉我们可以认为大多数系统是"局部"平坦的；即，是局部线性的.所以保守的建模者会试图把"线性"扩张到对所有感兴趣的区域都是成立的而且愿意严肃地采用这种扩张直到被证明不再适用为止.所以，即使在一个临界点附近由托姆分类定理表示的函数的性态在远离该临界点时并不成立，我们仍然不加考虑地假定函数性态仍然保持直到系统的性态展示出其他性态之前.而且当系统确实展示其他性态时，我们已经获得了中性假设在何处失效的信息.而且，这就能使我们积累怎样更精确地对这种情况下进行建模的根据和信息.当我们把我们的方法用于突

变论的应用时读者要记住这最重要的一点.

如前面所展示的使突变论在压杆的压弯的例子中起着魔术般作用的关键因素就是几个世纪来力学方面的研究工作所给予我们的支配压杆性态的能量函数的数学形式的极好的了解.可以说,由于掌握了这个函数,把有关的数学工具从奇点理论中取出并应用之,就只是件简单的事情了.当我们把这用于弯曲压杆时,意想不到地呈现出来的是以下事实:尖点突变是描述压杆压弯方式的正确方法.但是还有应用突变论论证的其他情形,在那里我们并没有有关支配系统的动力学的函数的如此完全的知识.这类分析的一个很好的例子出现在发育生物学中.

事物的形状

生物学中最大的尚未解决的问题,该领域学术研究中的未知领域,就是胚胎学的神秘.一开始是均匀的细胞球怎么能分化并自组织成我们看到的如今生活在地球上的无数种活生生的物种中的一种?这是细胞分化和形态生成,或更如实地说是形态形成过程的问题.受启发于英国发育生物学家C·H·沃丁顿[①]在1950年代后期的工作,R·托姆独创地发展了突变论作为试图处理这个特殊问题的数学方法.

[124]

托姆要数学地回答的这个大问题就是生物体的基本拓扑是怎样规定的.形态生成不会仅仅是由于处于正在发育中的胚胎的适当部位形成的正确类型的细胞而发生的.事实上,在胚胎发育过程的早期细胞的类型完全没有确定.相反的,大多数细胞有

① 译注:Conrad Hal Waddington,1905.11.8~1976.9.26,英国胚胎学家、遗传学家、科学哲学家.1933年他证明了来自某些组织的化学信使能诱导其他组织的发育,并由此进而研究调节基因(能控制其他基因的表现的一种基因).

能力在它们的初始形成后的某段时间中最终发展成许多不同的细胞类型中的一个类型.所以,什么是造成一个一般用途类型的细胞会突然变成一个肝细胞,或肌肉细胞,或脑细胞的原因呢?而且一旦一个细胞的命运被决定,为了在最终成熟的有机体中处于恰当的位置,该细胞怎么知道要移动到那里去以及何时移动到哪里去呢?简要地说,这些问题就构成了形态生成的谜.

没有人真正知道个别细胞的命运是怎样被决定的.但是,相邻的细胞在互相作用着而且在发育中的胚胎里存在着化学物质的梯度.相当出人意外的是,为了解释基于这些化学梯度的发展而提出一个显式数学模型的第一个研究人员竟是计算机科学家A·图灵①,他将在第4章关于计算的理论中担当主角.在1952年,他提出了一个包含各种未特别指明的化学物质的混合物,他称之为成形素,的反应扩散过程的一个数学模型.从那时起,许多研究者把图灵的思想发展到了高度的数学复杂程度,导致了例如B·古德温(Brian Goodwin)和H·曼哈特(Hans Meinhardt)等发育生物学方面某些研究者的如下观点,即每个细胞的最终命运是由各种成形素的浓度决定的.反过来,假定这些浓度是由描述成形素怎样相互作用以及怎样改变其水平和类型的一个动态过程来决定的.

因为采用了图灵的基本思想,就可以合理地假定在细胞中进行着依赖于时间的变化.为使事情尽可能简单,假定每个细胞的命运是由单个的成形素决定的,成形素的浓度是一个动态过程的平衡态,几何上它只是一个点.当然,这样一个平衡态会依赖于成百上千个生物化学变量,它们反过来生成了所假设的成 [125] 形素.我们把这些生物化学变量设想为观察难以看到的内部变量.所以,仅有的能观察到的系统的输出就是单个的量,成形素

---

① 译注:Alan Turing,1912.6.23~1954.6.7,英国数学家和逻辑学家,开拓了计算机理论.对计算过程的逻辑分析作了重要贡献.1952年发表了他对形态发生学理论研究的第一部分,即有生命的生物体的型状的演变.

的浓度.因为在时空中只有四个独立的方向,在这些方向上我们可以察看发展中的生物体,因此我们可以把这个问题设想为具有四个独立输入变量的问题.

现在我们发现我们自己处于类似的境地:单个的输出变量(成形素的浓度)依赖于四个输入变量(时空方向,我们在这些方向上可以观察正在发育的胚胎).我们可以把这些输入设想为纽结,即规定了在空间和时间上的特殊定位(我们在那里观察有机体)的每个设定.一般说,当我们缓慢并连续地扭这些结时,成形素的浓度,从而观察到的有机体的性质将会光滑地变化.但是对某些结的设定而言,多于一个的稳定的成形素的浓度是可能的.其结果就是形成了不同类型的组织间以及这些组织和有机体外的空间区域(即外部世界)间的"边界".因此我们和托姆一起猜测在空间和时间的一个特定点的局部邻域中发育中的生物体的物理形式是由早先在表3.1(见前面一节"托姆分类定理")中列出的七种初等的突变决定的.

突变类型	空间解释	时间解释
折叠型	边界	开始(终结)
尖点型	褶裥;断层	分割(统一);改变
燕尾型	分裂;沟	分裂;撕裂
蝴蝶型	袋	给予(接受);填入(空)
椭圆脐点型	波峰;齿弓	倒塌;淹没
双曲脐点型	尖钉;头发	钻(孔)
抛物脐点型	嘴	开(关);竖起

表 3.2 突变空间和时间解释.

结果表明表3.1中列出的"七种优美的"突变类型的每一种都可以给出既有空间又有时间的解释,有赖于我们是否把输入变量解释为空间或者时间.表3.2列出了这些可能性.作为如何利用这些解释的一个说明请考虑图3.17,它展示了抛物脐点突变的一部分.这种突变(从表3.2)的空间解释暗示形成了一张嘴,这确实是关于

当我们取这张曲面的不同部分时看起来会出现什么样的东西的一种很好的想象.该图形是通过固定抛物脐点族中四个参数中的两个并令其他两个参数变化画出的曲面.这里得到的曲面展示了抛物脐点曲面的这一部分和鸟嘴间惊人的相似之处.在文献目录列出的材料中可以找到许多这种类型的例子. [126]

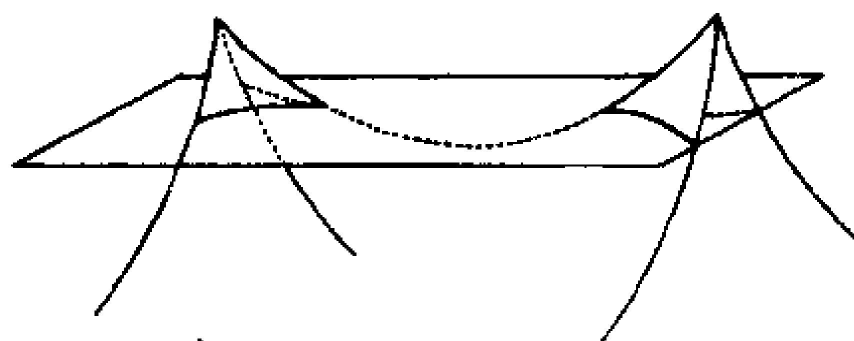


图 3.17 抛物脐点型突变的一部分

当对我们所要研究的基本过程能写下一种显式的数学表示时发育生物学就成了介乎物理学和哲学之间的某个研究领域了.我们对这些形态的举止行为知道一些,但是根本不能与我们对,例如,前面研究过的弯曲的压杆所知道的那么多相比.这类分析(我们对基本过程至少有一点知识)就是所谓的突变论的"半物理方法".这包括把输入变量看作是表征一个函数族的参数,而把实际上支配该过程的不管是什么样的函数的非莫尔斯部分与输出变量联系起来,然后利用我们有的物理知识来约束有关的函数族.

我想以下一点是很清楚的,即,突变论的这种半物理方法和以我们对弯曲压杆的分析为代表的物理方法是多么地不同.在弯曲压杆问题中我们知道问题中变量之间关系的泛函形式的一 [127] 切方面.所以把这个数学表示式插入奇点理论这部机器,转动数学的摇柄并最后得到有关的分歧图解就是件简单的事情了.但是就突变论的应用来说并不是到半物理方法就为止了.当我们对基本的动力学没有什么想法的时候还有所谓的突变论的"形而上学的方法"来登场表演.我们来察看一下可以怎样应用突变

论的这种方法来研究幽默的.

笑 和 哭

在J·A·泡罗斯(John Allen Paulos)的极其有趣且具有启迪性的书《数学与幽默》中他把突变论中的尖点曲面作为一类数学比喻,即用几何术语来概述什么是一则笑话逗人发笑的本质.泡罗斯通过指出以下一点来开始他的分析,即笑话有赖于在给定情景或对它的描述中的不协调的感知.因此笑话可以看作是在两种(或多种)解释间的安排好的含糊不清的一种形式.于是,笑话的妙句就担当起把听众从一种解释转移到另一种解释的开关的作用.图3.18提供了这类情景的一种几何看法.

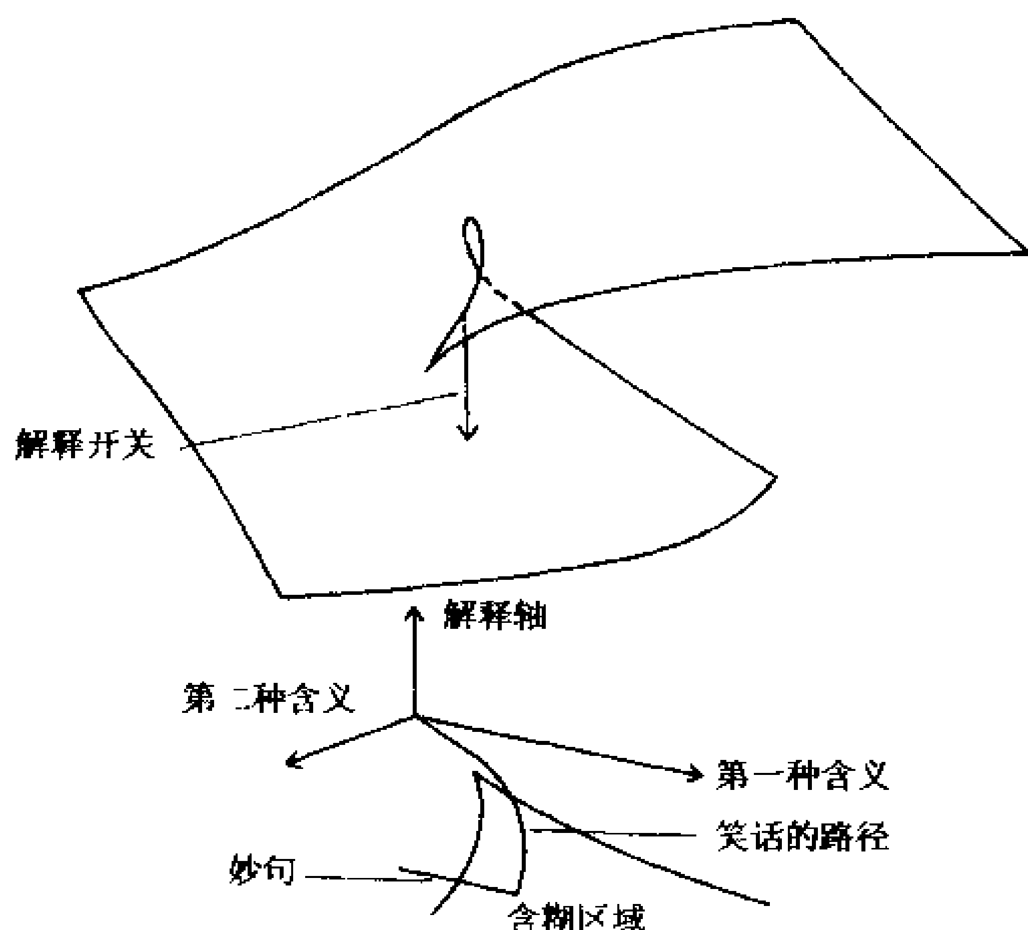


图3.18 笑话的尖点模型

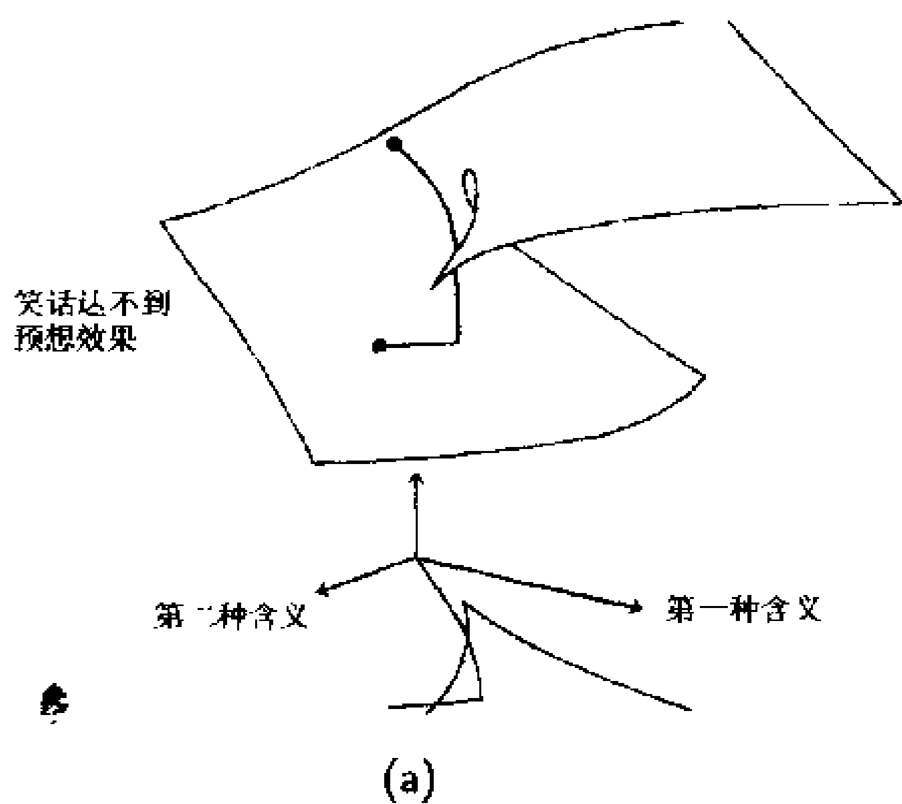
为说明这点，看一下到计算机约会介绍所造访的一位年青男子的故事.他告诉咨询顾问他要约会一位喜爱水上运动、乐于交往、在衣着方面容易相处而且很矮的女子.集成这些不同的要求，计算机匹配给他的是一只企鹅.这里阐述的第一种解释是具有某种生活方式的女子(图 3.18 中的上片部分).让这个青年男子去和一只企鹅作初次约会的妙句揭示了第二种、隐藏的解释，几何上这可以看作是从上片突变地掉到了下片.

笑话结构的这种尖点比喻也可用来图示地考察为什么一则笑话开始时小的偏差会导致该笑话不那么逗人发笑.其几何上的道理展示于图 3.19(a)中，这可以设想为说这则笑话故事发展的方式使解释穿过含糊区域到了错误的一边去了，因而它永远停留在曲面的下片上.因此这则笑话故事没有机会发展成跳向上片的跳跃而只能呆在下片，从而显得平凡不可笑.另一方面，图 3.19(b)则展示了看来会逗人发笑的笑话的发展轨迹 [128]

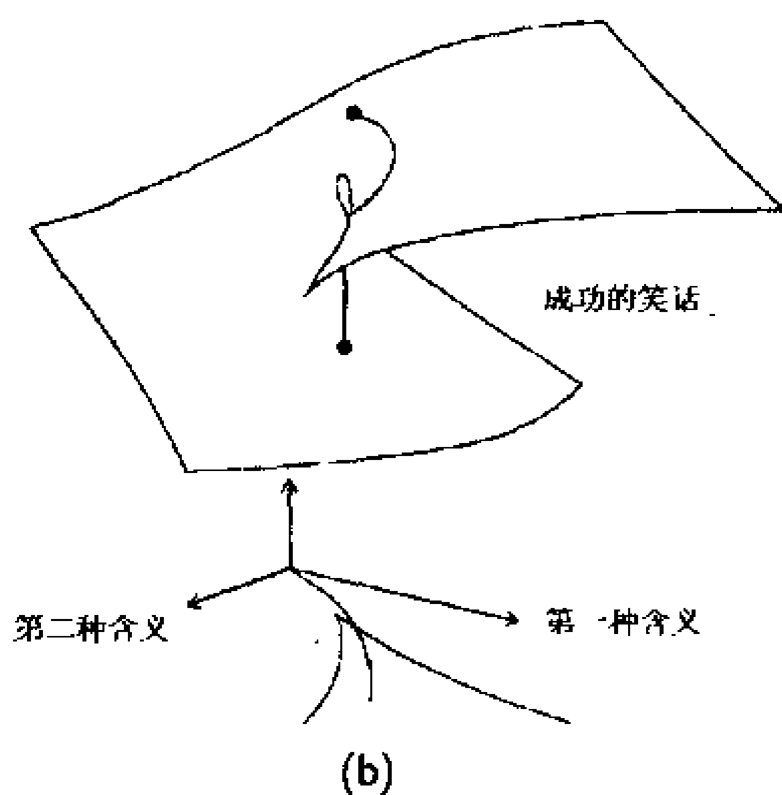
在泡罗斯把笑话当作突变的分析中，他还指出突变曲面的形状怎样提供关于说笑话时机掌握的重要性的某些洞察.喜剧演员必须能以某种方式感知听众是怎样解释他早先说过的话的，即喜剧演员必须知道听众位于突变曲面上的什么地方.如果听众超前于喜剧演员，那么另一种解释很快成为显然，从而笑话就失去了它的妙语应起的作用.另一方面，如果喜剧演员超前于听众，妙语不会突如其来地产生解释方面的突然跳跃，迫使喜剧演员必须解释该笑话为什么能逗人发笑.

尖点几何还暗示，如果曲面上片和下片之间的间隔愈大，那么笑话中妙语带来的解释上的变化将会更加逗人发笑.泡罗斯认为性和权力方面的笑话就可能属于这种情形，因为人们关心这类话题的渴望程度更大. [129]

尽管对把突变论作为了解幽默的一种"形而上学"的方式继续进行更广泛的讨论是吸引人的，但是我认为前面的概述足以说明其基本思想了.让我们来总结一下我们已经讲过的东西.



(a)



(b)

[130] **图 3.19** (a)笑话达不到预想效果的几何;(b)成功的笑话

我们首先选出不多几个称为"输入"的变量.在笑话的情形,这就是可能给予笑话故事的不同的含义.反过来,假定这些变量能引起另外不多几个称为"输出"的量的可观察到的变化.在笑话的情形,输出可以是听众给予笑话的解释,或者甚至可能会更好,即笑话的故事及其最后的妙语能带来生理和精神上的紧张和松弛.我们进一步假定输入变量不超过四个,输出不超过两个.接着我们又假定不论联系输入和输出的数学关系是什么,这种关系的解析结构满足托姆定理要求的技术性条件.概要地说,这些条件等同于要求该系统的输出是某个光滑动态过程的平衡点.最后,我们预先假定用来量度输入和输出的坐标系恰好和导致支配一个具有我们所选的输入和输出个数的系统的标准的突变几何的坐标系一致.如果不是这样的话,我们必须作一个变量替换把用以表达观察结果的以物理为基础的坐标系转换成能生成标准突变几何的以数学为基础的变量.突变论的数学理论使我们确信这种变换是存在的——然而却无助于求得这种变换.

现在让我们集中注意上段中的楷体字.每个都代表了一种我们必须接受的出乎意外的假定,如果我们想求助于托姆分类定理来挑选出一种能描述我们问题的特定的几何的话.正是在这一点上,物理学让位给了形而上学.或用另一种方式来表述,正是在这一点上,在传统意义下的运用具有已知解释的方程和变量的建模让位给了托马斯[①]主义者式的元建模(Thomist-style metamodeling).元建模问的是:如果你碰到了这类方程,你能期望看到什么样的现象?当然,就建模的使命、目的而言,传统的看法认为,为了充分客观地了解我们面对的世界,托马斯主义者的思考模式是无法解决问题的,太纯理论而且太哲学味了.事实上这种观点引发了1970年代关于突变论在认识论中的地 131

① 译注:Saint Thomas Aquinas,1224/1225～1274.3.7,意大利神学家和诗人.

位的一场激烈争论.幸运的是这是一场由于双方都没有做多少能让对方信服其论点的有价值的事而自然结束的争论——哲学和神学的争论通常是这种结局.不过,它有历史上的影响,至少可以作为科学的社会心理学方面的一个补充说明,为此我们摘要重述这场数学哄动的某些方面来结束我们关于奇点理论的讨论.

小题大作

1976年1月19日这一期的《新闻周刊》①刊登了整整一版的关于突变论的文章,是该杂志七年来第一篇关于数学的报导.该文以满怀希望和热情的措辞来描述突变论,认为托姆关于不连续现象的思想是自牛顿发明微积分以来应用数学中最大的进展.正如我们可以预料得到的,每当数学领域的一个耕耘者得到了超过了数学界认为是适当和正确的评价的界限哪怕是一点点的关注时,反对者就会蜂拥而上.既然是这样,在许多著名的数学界同仁的帮助和煽动下由H·萨斯曼(Hector Sussman)和R·扎勒(Rephael Zahler)领导发起了指责.1977年G·科拉达(Gina Kolata)在《科学》杂志上发表的题为"皇帝没有衣服"的文章开始了认真的交战,该文有若干像伯克利加州大学的S·斯梅尔(Stephen Smale)和斯坦福大学的J·基勒(Joseph Keller)那样的著名数学家发表的关于突变理论缺点的一些引述.在科拉达著名的文章中,可能是"应用"突变论的最著名的拥护者和阐述者的C·泽曼被描绘成一个"公关人员",托姆理所当然地也被引述了,但却是断章取义的,大意是,在一个一切概念都可以数学地阐明的世界里,惟独数学家有权成为智者.一大批来稿,赞成

① 译注:1933年创刊.1961年后因发表准确、活泼和生动的新闻报道而赢得声誉.

或反对的,都追随着该文提出的问题,其中几乎没有任何有关不同于托姆和泽曼从科学界,特别是数学界以外领域中得到的关注的内容. 132

在试图概括和评价这场争论各个组成部分的有利和不利方面的时候,对一个未介入这场争论的旁观者来说,很难不感到惊讶.为什么要如此小题大作呢? 正如生物学家 R·罗森(Robert Rosen)明智地提出的劝告:"如果个别的科学家发现了这类不为人喜爱的概念,就命他不要用这些概念.就认为他应把这些概念的出现作为个人的有意冒犯是没有道理的."这也是我的观点.突变论可能从这样猛烈的抨击中挺过来,几乎和达尔文的自然选择理论从使人悲痛的攻击中挺过来一样.两种理论本质上都是说明性的而不是预测性的,因此不能为那些渴求精确定量预测的人提供已变成科学的同义词的那种数字占卦术.但是正如R·托姆如此切中要害地指出的:"当世界上如此多的学者正在计算的时候,某个能想象的人是不可取的." 133

第4章 停机定理(计算的理论)

[135]

计算与计算的算法

计算机革命开始于1935年一个令人懒洋洋的英国夏日的午后,那时A·图灵,剑桥皇家学院的一个大学生,想制造一种推理机,用它解决希尔伯特(Hilbert)判定问题,这是数理逻辑中的一个著名的尚未解决的问题.大约在同一时间,在普林斯顿数学系的公共休息室里关于另一个数学上纠结不清的问题的热烈辩论,导致了一类新的逻辑运算的发展,这类逻辑运算把实现一项计算这件事的含意的启发式的概念,放在一个坚实的数学立足点上.这些由少数英国和美国数学家独立所作的努力,合到一起,形成了以后逐渐被称作"计算机科学"的学科的理论基础.十年后,由其在第二次世界大战期间的密码破译工作所驱动,图灵同冯·诺伊曼和在英国和美国的其他人一道,开始了将这些关于计算和逻辑的抽象的数学概念转变为实际的计算装置的进程.其余的,当然,就是历史了.本章考察这一工作的理论支柱.

在1935年,图灵旁听了数理逻辑学家M·纽曼(Max Newman)开设的一组课程.在课程中纽曼引入了希尔伯特的判定问题(*Entscheidungsproblem*),该问题问是否存在一种有效的程序,以预先确定某个结论能不能从一组给定的假设用逻辑推演出来.图灵立即被这一未解之谜迷住了,并且承担了解决它的任务.像现已弄清楚的那样,他在试图用数学术语表述此问题时,

所遇到的中心困难是,当时对于可视作"有效的程序"的东西,没有一个清晰的概念.虽说人类作计算已有数千年,但在1935年对于如下的问题仍没有一个好的回答,即什么是计算?图灵通过发明推理机而克服了这一困难,这一推理机起到了撑起计算的现代理论大门的拱心石的作用.

图灵的主要任务是弄清楚如何用一种形式的数学对象去代替有效的过程的直观上令人满意的——但是非形式的——概念.他所建议的是某种我们现在称作算法的东西,是他仿效人类在进行一项计算时实际经历的步骤而提出的一个概念.本质上,图灵将算法看作一个机械的过程,或者是一组规则,它告诉人们在任何一组特定情况下如何一步步进行.为了以例子说明这一基本的概念,考虑鳄梨酱的制作问题,这是一种在墨西哥及美国西南部部分地区流行食用的用来蘸玉米饼的调味液. [137]

鳄梨酱算法

鳄梨酱是鳄梨、大蒜、柠檬汁、切碎的葱头、红辣椒粉、盐和调味酱等的混合物.一旦这些配料备好了,制法以一种按部就班的方式规定了如何将它们加工和组合来形成调味液.例如,开头的几步可以是:

1. 往碗里撒一点盐,并用大蒜头摩擦.
2. 在碗里将鳄梨捣碎,并调以盐和红辣椒粉各1/4茶匙.
3. 倒入一茶匙柠檬汁.
4. 搅入2茶匙切碎的葱头.

这些步骤构成了我们可以称之为"鳄梨酱算法"的开始部分.在每个阶段,算法都明确规定了应完成的动作,最后是停步规则,告诉我们何时调味液已经做成.事实上,不难看到,给出了原料组分(和一个足够聪明的工程师),这样一种制作过程可以

用一纯粹机械的方式由"鳄梨酱制作机"来完成.

正是算法构成了计算的数学理论的核心.现在我们离开厨房,观察一类不怎么现实却较为有数学味的例子.

欧几里得算法

考虑求可除尽二已知整数 a 和 b 的最大数的欧几里得算法.这是求两个数的最大公因子的一种规则.在最近几年,求大整数的素因子的问题,由于直接同将数据译成"不可破解的"密码从而在公开的电话线路上传送的问题有关,其重要性日益增大.具体说,如果能保证没有好的,也就是快的方法,将一个大数分解出它的全部素因子,那么就能造出许多这样的不可破解的编码.结果,数的因子分解的算法模型,是现时相当重要的研究课题.下面要讨论的欧几里得算法是出了名的计算上无效率的,也就是慢的.而且,它只能求到两个数的最大公因子,这可能是也可能不是一个素数.虽然如此,这一算法在数论中是有重大的理论价值的,并可用作我们用"算法"一词所表述的概念的一个最为完美的例子.

为确定性起见,假设 a 大于 b.而且,引入符号"$\text{rem}\left\{\frac{x}{y}\right\}$"表示数 x 被另一数 y 除后的余数.那么欧几里得算法由按如下规则算出整数序列所组成,即

$$r_1=\text{rem}\left\{\frac{a}{b}\right\},\ r_2=\text{rem}\left\{\frac{b}{r_1}\right\},\ r_3=\text{rem}\left\{\frac{r_1}{r_2}\right\},\cdots$$

该过程继续进行直到得余数为 0 为止.过程停在数 r^*,这数就是能除尽 a 和 b 二者的最大整数.准确解释为什么这一规则产生 a 和 b 的最大公因子这有点离题太远.但有兴趣更详细地了解这一古老算法的读者可以在任何一本初等数论书中找到解释.

为了具体地说明这一过程,我们令 $a=137$ 和 $b=6$.然后按

照欧几里得算法的步骤得到

$$r_1 = \text{rem}\left\{\frac{137}{6}\right\} = 5, r_2 = \text{rem}\left\{\frac{6}{5}\right\} = 1, r_3 = \text{rem}\left\{\frac{5}{1}\right\} = 0.$$

于是得到结论 $r^* = 1$ 是 137 和 6 的最大公因子. 观察敏锐的读者将会注意到,我们并不真正需要欧几里得算法来得到这一结果,因为 137 是一个素数,能除尽 137 的数只有 1 及其自身. 这就暗示 137 和 6 的最大公因子只能是 1. 如此 137 和 6 是所谓的*互素*的整数.

正如鳄梨酱例子的情况那样,此处重要的在于欧几里得算法的步骤是严格描述出来的,不变的和事先固定的. 在每一步规定一种且只规定一种运算,没有关于中间结果的解释或任何的步骤跳跃——真真一个令人厌倦的,基本上是除法和取余数运算的机械的重复. 这种对一组规则的盲目追随,是构成算法的东西的本质. 因此,为了反映包含在算法步骤的执行中的那种机械的本性,图灵发明了一种假设的机构,现在称作"图灵机". 然后他用这一"机器"的性质来使完成一项计算的含意形式化. [139]

图灵的不可思议的机器

图灵机由两部分组成:(1)一条无限长的带,划线隔成一个个小方格,每一个可以容纳一有限符号集中的一个符号,(2)一个读写头,它能从带上的小方格读、写和清除符号. 因为为图灵机设定多于两个符号的字母表在一般性方面并不能带来任何好处,所以我们假设全部符号就是两个元 0 和 1. 为备以后参照,重要的是要注意到我们在这里并不认为符号 0 和 1 是数零和一,而仅仅是表示这些数的*数码*. 并且事实上,我们也一样能够选择任何其他两个能识别的不同符号,像罗马数字 I 和 II,字母 X 和 Y,或者甚至更为抽象的符号★和✠等. 然而,由于在历史上和实践上的种种原因,人们遵守通常的惯例使用 0 和 1 是适宜的. 图灵机的一般装置描画在图 4.1 中.

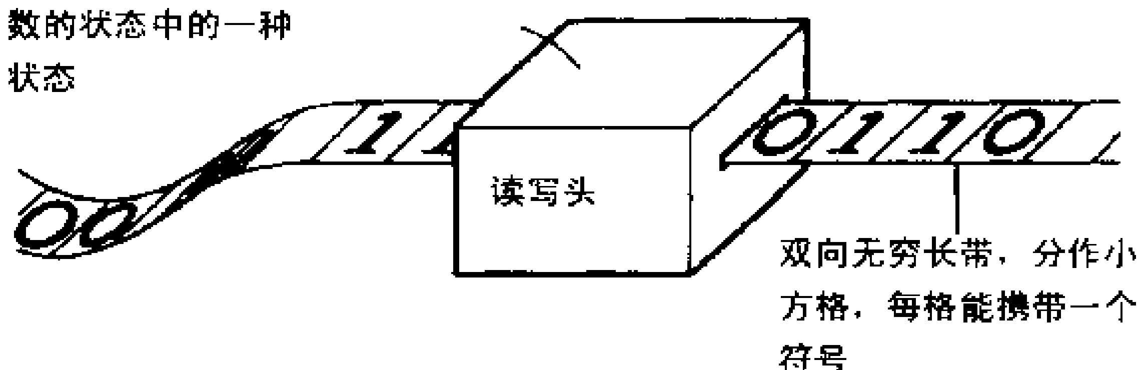


图 4.1 图灵机的图示

图灵机的行为是由算法控制的，算法用现在称作程序的东西来表示．程序由有限条指令组成，每一条取自下列一组可能的选择：

PRINT 0 ON THE CURRENT SQUARE　在当前方格中写 0

PRINT 1 ON THE CURRENT SQUARE　在当前方格中写 1

GO LEFT ONE SQUARE　左移一格

GO RIGHT ONE SQUARE　右移一格

GO TO STEP i IF THE CURRENT SQUARE CONTAINS 0　若当前方格内容为 0 转向步 i

GO TO STEP j IF THE CURRENT SQUARE CONTAINS 1　若当前方格内容为 1 转向步 j

STOP　停止

就这些．从这 7 种简单的指令出发，可以组成所谓的“图灵—波斯特(Turing - Post)程序”．这些程序告诉机器应当完成何种计算．

为以后参阅，注意上述指令表中的语句“GO TO…”是可以消去的，通过给与读写头一种内部的机构，例如一个指针，它在计算的每一步能够存在于有限个位置 A，B，C 等的任何一个．这些不同的指针方位称为读写头的内部状态．内部状态的引入大大缩短了图灵机程序的书写表述，但决没有改变机器所能完成

的计算的种类.

图灵机的操作十分简易.我们首先馈入载有一定样式的 0 和 1 的带(输入数据).机器然后通过置读写头于某个已定的开始方格而开始运行.此后机器所取的动作就完全由其程序中的指令所决定.与其继续用这种抽象的语言讲说,不如真正演示一个例子来获得关于这样一个装置如何工作的要领要更简单些.

假设初始带的构成为一串 1 及两端各一个 0,如

…	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	…

在上述的带的构成中,黑体字的 1 表示读写头当前所在的方格.对这个例子,假设我们想要图灵机将此串的两端的 0 改为 1 并随后停止,这样来使 1 的区段的长度增加 2 格.下面是一个完成这一任务的程序:

1. GO RIGHT ONE SQUARE 右移一格
2. GO TO STEP 1 IF THE CURRENT SQUARE CONTATNS A 1 若当前方格内容为 1,转向步 1
3. PRINT 1 ON THE CURRENT SQUARE 在当前方格中写 1
4. GO LEFT ONE SQUARE 左移一格
5. GO TO STEP 4 IF THE CURRENT SQUARE CONTAINS A 1 若当前方格内容为 1,转向步 4
6. PRINT 1 ON THE CURRENT SQUARE 在当前方格中写 1
7. STOP 停止

追踪这一简单程序的步骤,发现读写头向右移动直到它找到第一个 0,那时通过命令 PRINT 1 而将 0 换作 1.然后读写头向左移动直到发现 0 并用 1 代之,于是停机.图 4.2 给出了图灵机的一般工作方式的较为图表式的表示.

现代的计算装置,即使是家用计算机,像我正在用来写作本书的这一台,较之带有其不多的内部状态和非常有限的读写头

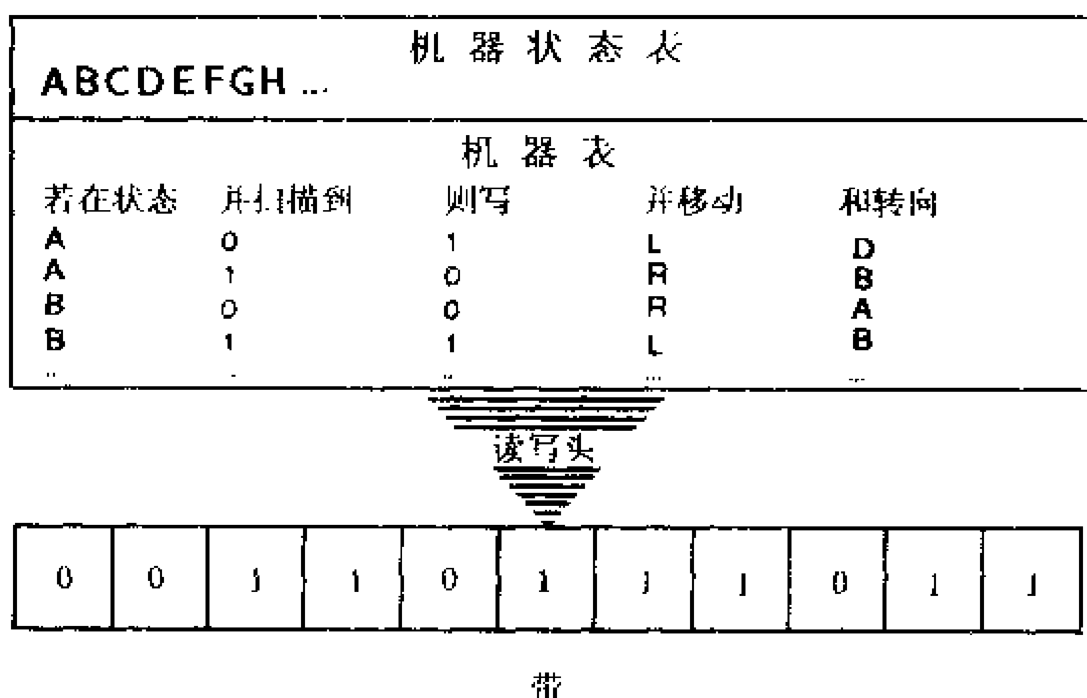


图 4.2 图灵机的图表式表示

[142] 活动项目的图灵机，看来在结构上远更复杂得多，在其计算能力方面也远更强有力。然而，结果证明并非如此。并且大部分荣誉应归于图灵，因为他认识到，能在任何的计算机——理想的或非理想的——上执行的任何的算法（也就是程序），也能用他的机器的一种特定的样式，称作通用图灵机（或缩写作 UTM）来完成。这样除了计算的速度之外，计算速度肯定是依赖于硬件的，没有一种我的（或者任何别的人的）机器能作的计算而用 UTM 不能够作的——只要给以足够的时间和内存。

为了详细说明他的 UTM，图灵认识到不仅问题的输入数据，而且程序本身也可以用一系列的 0 和 1 来代码化。表 4.1 给出了可以作这一编码的许多方式中的一种。所以，我们可以把程序看作为另一类输入数据，将之与它要加工的数据一起写入带中。有了这一关键性的认识，图灵构造了一个程序，它能模拟任何其他的程序 P 的动作，只要这程序 P 作为其输入的一部分（也就是说，他创造了一个 UTM）。我们看一看它是如何工作的。

程序语句	编码
PRINT 0 ON THE CURRENT SQUARE	000
PRINT 1 ON THE CURRENT SQUARE	001
GO RIGHT ONE SQUARE	010
GO LEFT ONE SQUARE	011
GO TO STEP i IF THE CURRENT SQUARE CONTAINS 0	$101\underbrace{00\cdots0}_{i}1$
GO TO STEP j IF THE CURRENT SQUARE CONTAINS 1	$110\underbrace{11\cdots1}_{j}0$
STOP	100

表 4.1 图灵机语言的一种编码方案

假设我们有一个图灵机程序 P，我们现在知道它完全规定了一台特定的图灵机. 至此所有我们需要做的就是将这一程序 $\boldsymbol{P}$ 连同它所要对之动作的输入数据一起，写到 UTM 的带上. 此后该 UTM 将模拟程序 $\boldsymbol{P}$ 对数据的动作；在将程序 $\boldsymbol{P}$ 在原机器上运行同使 UTM 模拟 $\boldsymbol{P}$ 之间没有什么可识别出的差别，也就是说，假装它就是图灵机 $\boldsymbol{P}$.

从理论的观点看，图灵机的重要之处在于它表达了一个形式的数学对象. 这样一来，随着图灵机的发明，人们第一次对于作某项计算意指什么有了一个明确定义的概念. 然而这随之又产生了准确地说用这样的数学机构能计算些什么的问题. 具体说来，是否存在一种适当的图灵机能计算每一个数? 或者说是否存在永远超出计算的界限的数? 图灵自己在他 1936 年的开拓性论文中发表了这一可计算性问题，文中他引入图灵机作为解答这些基本问题的手段.

不可计算

为开启我们关于可计算性的讨论，首先要弄明白可计算的数意指什么.简单地说，一个整数 n 定义作是可计算的，如果有一个图灵机可将其做出来，即，从一个内容全部为0的带开始，存在一个图灵机程序，将在有限步后停止，带则载有一串 n 个1和所有其余的0.注意这是可计算的数的含意的一个定义，并且是依赖于计算的这一图灵机模型的.这暗示着一个特定的数可能就图灵机模型是可计算的，而就作某项计算的含意的另一种数学理想化而言又是不可计算的.这一事实在本章的末尾将更详细地继续讲述.但是现在重要的仅是注意可计算的数的概念不是一个绝对的概念，它依赖于你所使用的计算的模型.

由于大多数实数由无穷多位数字组成，计算一个实数的情况有点难处理.例如像数 $\pi = 3.14159265\cdots$ 或者 $\sqrt{3} = 1.732\cdots$ 无穷继续，绝不可能表示为任何有限位数字的循环重复.所以我们称一个实数是可计算的，如果有一图灵机能够连续地一位跟着一位地写出该数的各位数字.当然，在这种情况下机器一般将永远运行下去.为考察可计算性的这些定义在数学上是否有意义，人们想知道的第一件事是有没有不可计算的数.现在我们将考虑在使用这样一种装置实际计算数时我们能力的局限性.

[144]

可以证明，对于一个具有 n 个可能的读出头状态的2符号图灵机，可以写出恰好 $(4n+4)^{2n}$ 个不同的程序，当然，这跟不同的图灵机的数目相一致.这意味着一台 n 状态机器最多能计算这样多个数.设 n 取值 $n=1,2,3,\cdots$，可以得出结论说图灵机所能计算的数最多为一可数集，也就是说其元素可以同正整数（"计数"数）建立一一对应的集合.然而实数有不可数那样多；因此，我们得出一个或许是令人惊异的结果，即实数的绝大部分是不可计算的.

这一计数的论据是证明存在不可计算的数的方法之一，尽

管是一个有点间接的方法.图灵自己用的是一个基于称作"康托尔[①]对角线证法"的更为直接的方法.其证明像如下这样进行.考虑下列的名表:Smith, Otway, Arquette, Bethel, Bellman, 和Imhoff.现在取第一个名字的第一个字母,并且按字母表顺序后推一个位置.这样得到 T.然后对第二个名字的第二个字母,第三个名字的第三个字母等等做同样的事情.所得结果为"Turing".显然,名字"Turing"不可能在原来的表中,因为它同表中的每一个成员都至少有一个字母不同.

图灵的关于不可计算数的存在性的论证沿同样的思路进行.假设你开列出了在 0 和 1 之间的所有的可计算数,比如说用它们的十进小数表达式写出.因为按前面刚刚给出的论据可计算数形成一可数集,也就是说它们可以同正整数一一对应,所以这是能够做到的.当然,这样的一张表将是无限长的,但下面是它的开头部分:

$$n_1 = 0.a_1a_2a_3a_4\cdots,$$
$$n_2 = 0.b_1b_2b_3b_4\cdots,$$
$$n_3 = 0.c_1c_2c_3c_4\cdots,$$
$$\cdots\cdots$$

[145]

其中量 a_i, b_i, c_i 中的每一个都是 0 和 9 之间的整数.现在将第一个数的第一位数字,第二个数的第二位数字,以及一般地,第 k 个数的第 k 位数字,每个后推一个数字.用这一方法一个新的数 $N = 0.(a_1+1)(b_2+1)(c_3+1)\cdots$ 产生了出来[②].这个数不可能在原表中,因为它跟表中的每一个数都至少有一位是不同的.然而,由定义,此表包含了所有的可计算数.因此,这个新的数必定是不可计算的.

从前面的论证可见,不可计算数是司空见惯的,可计算数只

① 译注:Georg Cantor, 1845.3.3~1918.1.6,德国数学家,集合论的创始人.

② 译注:这里应当将 9+1 理解作 0,即 9 的后继为 0,0 的后继为 1,……

是例外，这因为 0 和 1 之间的可计算数是一个可数集，形成构成 0，1 区间的实数的这一不可数集的一个非常“稀薄”的子集．这一令人惊异的事实表明，在我们日常的个人生活和职业生活中所处理的所有的数，正是我们能将它们写出来（也就是说有一条规则来生成它们的各位数字）这一事实，意味着它们必定是可计算的，但却只形成所有可能的数的一个用显微镜才可见的小的子集．占压倒多数的数是在一个不能凭追随任何类型的计算机器的规则而达到的王国里．现在我们来看几个专门的不可计算的量的例子．

忙碌海狸对策

假设给你一满记 0 的输入带，要你为一 n 状态图灵机写一个程序，使得：(1)程序必须最终会停机，(2)程序在停止前应在带上写上尽可能多的 1．显然，能写上的 1 的个数是一个仅依赖于机器可用状态数 n 的函数．同样清楚的是如果 $n=1$，可写上的 1 的最大个数仅为 1，这是从程序不能永远运行这一要求立刻得出的结果．如果 $n=2$，已知的是在停机前能写上的 1 的最大个数是 4，这也是从机器必须最终停机这一事实得出的结果，而一个 3 状态机器在停止前能写上 6 个 1．能在停机前写上最大个数的 1 的程序称为 n 状态忙碌海狸．

状态	符号读出	
	0	1
A	$1,R,B$	$1,L,C$
B	$1,L,A$	$1,R,B$
C	$1,L,B$	1，STOP

表 4.2　一个 3 状态忙碌海狸

表 4.2 给出了一个 3 状态忙碌海狸程序，而图 4.3 表明该程序

如何能在停机前在带上写上 6 个 1. 读者应按下列方式解释表 4.2 中的内容:假设读写头在状态 A 并从带上读出符号 1. 按照表 4.2 中的程序,机器现在应当取动作$(1, L, C)$. 这是图灵机速记法,用以说读写头应"在方格中写 1,向左移动一格,然后将指针置于位置 C,也就是说进入内部状态 C". 表中的其他指令类似地解释. 读者也应当注意到带的读写头的位置在图中是用黑体字表示的.

状态									
A	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0
B	0	0	0	0	1	**0**	0	0	0
A	0	0	0	0	**1**	1	0	0	0
C	0	0	0	**0**	1	1	0	0	0
B	0	0	**0**	1	1	1	0	0	0
A	0	**0**	1	1	1	1	0	0	0
B	0	1	**1**	1	1	1	0	0	0
B	0	1	1	**1**	1	1	0	0	0
B	0	1	1	1	**1**	1	0	0	0
B	0	1	1	1	1	**1**	0	0	0
B	0	1	1	1	1	1	**0**	0	0
A	0	1	1	1	1	**1**	1	0	0
C	0	1	1	1	**1**	1	1	0	0
停止	0	1	1	1	**1**	1	1	0	0

带

图 4.3 3 状态忙碌海狸的动作

现在谈我们的不可计算的量.定义 BB(n)为用 n 状态忙碌海狸程序写上的 1 的个数.这样一来,忙碌海狸函数 BB(n)的值就是任何能停机的程序能够在 n 状态图灵机的带上写上的 1 的最大个数.我们已经看到 BB(1) = 1, BB(2) = 4, 和 BB(3) = 6. 从 n 的小值的这些结果看来,似乎函数 BB(n)当 n 增大时或许没有任何特别令人感兴趣的性质.但你不要对一个函数仅凭它对其自变量的几个值的性能作结论.详细的研究已证明

$$BB(12) \geq 6 \times 4096^{4096^{4096^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{4096^{7}}}}}}}$$

其中数 4096 在点点点区段出现 166 次.这样在试图计算 12 状态图灵机的忙碌海狸函数的值时,我们很快得到一个如此巨大以至几乎是无穷的数.现在明白对于足够大的 n 值,忙碌海狸函数对这样的 n 值的值超过任何的在这些同样的 n 值上计值的可计算函数的值.换句话说,忙碌海狸函数 BB(n)是一个不[147]可计算的函数.这样为找一个有效的不可计算数的具体例子,取有大的状态数 n 的图灵机即可.然后寻找忙碌海狸函数对那个 n 值的函数值.答案实际上是一个不可计算的数.

现在为了牢固地确立在某件事存在的事实和我们能够显式地展示,也就是说,计算,这同一件事之间的差别,考虑另外一类对策.这类对策将表明,能够证明局中人之一的获胜的策略的存在性,而同时又表明"获胜"的局中人将因为永远不能计算出按获胜策略在[148]对策的每一步要做的动作,而永远不能有效地使用这一策略.

图灵机对策

假设有两个局中人,相当缺乏想象地称他们作 A 和 B.这些局中人轮流选取正整数如下:

步 1. 局中人 A 选数 n.

步 2. 局中人 B 知道了 n，取数 m.

步 3. 局人 A 知道了 m，选数 k.

然后规则给出，如果有某个 n 状态图灵机，当从一载有全 0 的带开始时，恰好在 $m+k$ 步停止，则局中人 A 获胜. 否则局中人 B 获胜. 相当明显的是这是一项持续时间有限的对策，因为一旦局中人选出了他们的整数，所有要做的就是构造 $(4n+4)^{2n}$ 台有 n 个状态的图灵机，使每一台运行恰好 $m+k$ 步以确定胜者. 如果这些图灵机的程序哪怕只有一个在第 $m+k$ 步停止，则局中人 A 赢得对策；如不然，胜利属于局中人 B.

从对策论知道，任何一个固定的、有限期的 0 和对策，按下述意义是确定的，即对于局中人之一存在获胜策略. 在本例中是局中人 B. 虽然如此，图灵机对策作起来并不平凡，因为一旦局中人选出了他们各自的整数，他们之中谁将是最终的胜利者远不是立刻显见的. 这是因为局中人谁也没有一个确定的规则，或者算法（也就是说，一个可计算的策略），使他或她能据以赢得对策. 这一事实的证明依赖于说明任何获胜策略涉及到计算一个函数的值，它较之忙碌海狸函数的值生长得更快. 然而我们已经知道 BB(n) 是不可计算的；因此，这一新函数也必定是不可计算的. 读者在文献目录中可看到包含这一证明细节的材料的简述.

我们的可计算数的定义，以及忙碌海狸和图灵机对策，这三者的一个极其重要的方面是所包括的程序必须在有限步后停止. 我想，明显的是直到计算过程终止之前，你没有真正计算任何东西（即使在实数的情形，任何有限的计算一般只产生对你试图计算的数的一个近似）. 这将是一件颇为令人不快的事，例如，如果会计室的造工资册的程序不能停止了，使得你的工资支票永远不得打印和汇出（尽管若同样的命运落在抵押单据公司在准备你们的月度报告书时的程序上，这不快会小得多）. 这一简单的观察引导出计算的理论中一个关键的问题：是否存在一般的工作过程（也就是算法）能事先告诉我们一个特定的程序是否

149]

将在有限多步后停机？这就是著名的停机问题.

根据无限性吗?

现在用稍微更明确些的语言重述停机问题：任给图灵机程序 P 和一组输入数据 I，是否存在单个程序，接受 P 和 I 作为其输入数据，并在有限多步后停机，在停机点上带的最后构成则指明 P 在加工数据 I 时是否将在有限多步后停止？细心注意我们在此处所寻求的是为任何程序 P 和一切可能的输入数据 I 而工作的单个程序. 这是一种"元计算的"问题，因为它是询问能告诉我们关于全部的程序的特性的程序的存在性.

为展示这一问题的远非平凡，假设有一程序 P，它读图灵机的带并且在遇到第一个 1 时停止. 因而本质上该程序说，"一直读下去直到遇到 1 则停止." 在此情况下，完全由 1 组成的输入数据 I 将导致程序在第一步后即停止. 另一方面，如果输入数据全部是 0，程序将永不停止. 当然，在这一情况下，我们有一确定无误的过程以判定程序在加工某个输入带时是否将停机：这就是看一下带. 程序会停止当且仅当带上有哪怕一单个的 1；否则程序将永远运行下去. 这是停机规则的一例，该规则用于由这一特定的简单的程序所加工的任何一组数据.

遗憾的是，大多数实在的计算机程序较此远为复杂得多，并且简单看一下程序或输入带，远不能弄清楚当程序着手其事务时将计算何种类型的量. 归根结底，如果我们预先知道在每[150]一步程序将作的计算，就不一定运行该程序. 而且，实在程序的停步规则几乎总是一个隐式的规则，告诉像"如果满足这样那样条件的如此这般的量出现，则停止；否则继续计算". 停机问题的本质是问是否存在任何有效的工作过程，能够用于程序及其输入数据，以事先告知我们该程序的停机条件是否会被

满足. 在1936年，图灵用停机定理一劳永逸地解决了这一问题.

停机定理 给以一任意的图灵机程序 *P* 和一组任意的输入数据 *I*，不存在单个的图灵机程序，它在有限多步后停机，并告诉我们 *P* 是否会结束输入数据 *I* 的加工.

图灵—丘奇论题

图灵机的概念最终将计算的概念放在了一个坚实的数学立足点上，使我们能够从含糊的、直觉的有效过程的思想过渡到精确的、数学上明确定义的算法概念. 事实上，图灵的工作，与美国逻辑学家A·丘奇（Alonzo Church）的工作一起，形成了现在称作“图灵—丘奇论题”的基础.

图灵—丘奇论题的内容存在于它的下述断言中，即任意的能够计算的是可以用适当的图灵机来计算. 这一说法之所以称作论题而不是定理，是因为它实际上是无从证明的. 的确，在性质上它更多的是一个定义，或者建议，提议我们赞成将进行一项计算的非形式的概念同图灵机的形式的数学概念等同起来. 更为形式地说，有如下的图灵—丘奇论题：

灵图—丘奇论题 每一个有效的过程都是可以通过在UTM上运行适当的程序来实现的.

为了更为有力地推销将完成一项计算同一图灵机的运行相等同这一点，在图灵机和打字机（不知还有没有人仍然使用这样的东西?）之间作一类比是有益的. 像图灵机一样，打字机也是一种简单的装置，用它可以将一系列字符打印在一张潜在地无穷长的纸上. 打字机也只有有限多个状态，这可以是：大写字母和小写

字母，红的或者黑的色带，不同的字符头等等．但尽管有这些限制，任何打字机都可以用来打印《坎特布雷故事集》①，《爱丽丝漫游奇境记》②，或者任何其他的字符串．当然，也许需要乔叟或者刘易斯·卡洛尔起首告诉机器做什么，反正能做．类似地，也许需要一个非常熟练的程序员去告诉图灵机如何求解困难的计算问题．然而，图灵—丘奇论题提出，基本的模型——图灵机——对于每一种类型的通过一项计算可完全回答的问题是足够的．

有一点或许没有逃过读者的注意，这就是图灵机在着手完成一项计算时所采取的动作，同数学家在使用一系列逻辑推理证明一个定理时所取的步骤这二者之间，存在着一种十分明显的类似．于是现在我们将注意力暂时从计算移向纯粹的逻辑，目的是证明它们实际上是同一个东西．

形式和内容

在1928年在意大利波隆那举行的国际数学家代表大会（ICM）期间，负有盛名的德国数学家大卫·希尔伯特③提出了一项挑战，此事以后决定性地永远改变了我们关于在逻辑上可证明的和实际上真实的这二者之间的联系的思考方法．

在希尔伯特1928年的讲演中极为重要的是，是否可能证明每一个真实的数学陈述的问题．希尔伯特寻求的是一种有能力解决每一个可能的数学陈述的真值机．只要在一端馈入陈述，转动曲柄，在另一端就拍的一声出来了答案：真或假．理

① 译注：14世纪英国诗人乔叟（Geoffrey Chaucer）的代表作．

② 译注：英国数学家和逻辑学家C·L·道奇森（Charles Lutwidge Dodgson，1832～1898）以笔名“刘易斯·卡洛尔”（Lewis Carroll）所发表的一部著名童话．

③ 译注：David Hilbert，18621.2.3～1943.2.14，德国数学家．

想地，在这一装置中，原来的陈述将或者是一个真实的数学事实，并因此是从给定的假设可以按逻辑推出的，于是成为一定理，或者它是谬误，并随之不是定理，也就是说，它的否定将为一定理．简言之，希尔伯特的真值机将给出每一个可能的数学论断全体的一个完全的报告．在他的波隆那演说中，希尔伯特设计了要这样一个真值机，或者更为引经据典地称公理化的、或者形式的、逻辑的系统，同时坚信他的研究“规划”将最终产生全部数学的一种完全的公理化． [152]

同这项对数学界的挑战一起，希尔伯特再度强调他在更早的于1900年在巴黎举行的一次ICM上所提出的其他问题的一个不同的方面．抱着未解决的问题是任何智力活动领域的原动力的信念——并且作为世纪转换的标志——希尔伯特列出了23个问题，他认为它们的解决对数学的发展具有核心的重要性．这个问题单中的第二个问题涉及到证明数学推理是可信赖的．换句话说，按照数学推理的规则，人们应当不会得出相互矛盾的陈述；一个命题及其反面二者不应当都是定理．当然，这种自一致性的要求，对于希尔伯特想要引导到逻辑上一致的结果的那种公理化系统的任何一个，都是一项必要条件，因为在很久以前，亚里士多德就已经证明，如果系统是不一致的，则任何断言都可以随我们的意愿证明它是真的或者假的．这对于任何种类的可信的知识，不论是数学还是其他的，可不是一个可靠的基础．

在希尔伯特的波隆那演讲之后不到三年，年青的奥地利逻辑学家哥德尔[1]通过发表一篇革命性的论文而令数学界惊愕，该论文将希尔伯特最为渴望实现的梦想变成了最为可怕的恶梦．哥德尔在他1931年的论文中，证明了存在真实的但却不能证明的数学

[1] 译注：Kurt Gödel，1906.4.28～1978.1.14．美籍奥地利数学家、逻辑学家．

陈述．用较为平淡无奇的话说，在能证明的和真实的二者之间存在一个永恒的无法沟通的鸿沟．为全部数学建立一个公理化框架的想法——希尔伯特作为数学的一个首要的目标而发表——是哥德尔对证明的攻击的出发点．这样我们用了一点希尔伯特为公理化数学真理的规划的背景，来开始我们的故事．

希尔伯特相信，消除在数学中出现像“这个句子是错误的”（也就是说，前后不一致的）这样的悖论的可能性的方法，是创造一个实质上“没有意义”的、纯粹语法的框架，在其中去说数学[153]陈述的真理或谬误．这将是一个这样的框架，在其中数学陈述全是用纯粹抽象的符号来表示的，这些符号除了在框架本身中用定义所给予它们的意义外没有其他的内在意义．这样的框架现在称作形式系统，它为数学世界中在能够证明的和实际上是真实的二者之间的差距的研究，构建了历史性的出发点．

形式系统的“没有意义的陈述”由抽象符号的有限序列组成．这些符号常称作该系统的字母，而系统的“字”通常称为符号串．符号可以是像★、✹，和✠这样的东西，或者它们甚至可以是像 0 和 1 这样的记号．但是在后一种情况，绝对重要的是要认识到我们现在不是在谈论数 0 和 1，而只是数码 0 和 1．只有当这些符号被赋以数的意义时，它们才获得通常同数 0 和 1 联系在一起的性质．我们会很快回来仔细地讨论这个问题的．在形式系统中，这些符号串中的有限个被称作系统的公理．完整的形式系统还要有有限多条变换规则，或者通常所称的逻辑推断规则．这些规则规定，一个给定的符号串如何能转变为一个新的符号串．

在形式系统中，证明的一般概念是从公理之一开始，使用变换的一个有限序列，将此公理转变为一个接一个的新串，这里每个串或者是系统的已给定的公理之一，或者是从其前面的串用变换规则推导出来的．这样的序列中的最后的串称作系统的定理．所有定理的全体构成系统的可证明物．然而要小心注

意，这些所谓的陈述实际上没有说任何东西；它们只是些抽象符号串．我们过一会儿就来谈这些定理如何获得意义，但首先通过一个简单的例子看看这一结构如何工作．

假设我们的系统的全部符号是★（星号）、✠（马尔他十字）和✹（旭日号）三个．设二元素串✠✹是系统的唯一的公理．设 x 代表星号、十字和旭日号的任意一个有限串，系统的变换规则取作：

[154]

规则Ⅰ：　x✹ ——→ x✹★

规则Ⅱ：　✠x ——→ ✠x x

规则Ⅲ：　✹✹✹ ——→ ★

规则Ⅳ：　x★★x ——→ x x

在这些规则中，→意指“被更换为”．例如，规则Ⅰ表示我们可以通过添加一个星号于任意的以旭日号结尾的串而形成新串．规则Ⅳ的解释是任何时候若两个星号相连出现在一个串中，则去掉此二星号以形成新串．现在我们看看这些规则如何能用来证明一个定理．

从单个公理✠✹开始，我们可以通过按下列次序使用变换规则而推导出串✠★✹是一个定理，即

——→✠✹——→✠✹✹——→✠✹✹✹✹——→✠★✹

（公理）　（规则Ⅱ）　（规则Ⅱ）　（规则Ⅲ）

这样的步骤序列，从公理开始，结束于陈述如✠★✹，称为用此序列中最后的串所表述的定理的证明序列．注意在最后一步使用规则Ⅲ时，可以从前一串中更换后三个✹而不是前三个，因而结束于定理✠✹★，代替✠★✹．敏感的读者也将注意到，在从公理向定理的移动中所得到的中间串皆以✠开头．从该系统的公理和变换规则的作用可以十分明显地看出，每一个串都会有这一性质．这是该系统的一项元数学性质，因为它是一项

关于该系统的，而不是在系统本身中造出的陈述．在系统能从其内部（它的串）表达的和我们关于系统从外部（串的性质）能说的这二者之间的差别，对于哥德尔的结果是极端重要的．

将一个图灵机程序的全部作用，同我们刚才亲历的使用一个形式系统的变换规则的全部操作作比较，人们可以说在这二者之间没有本质的差别．事情也正是这样．表现图灵机和形式系统之间的完美对应的结对儿表给出在表 4.3 中．

图灵机	形式系统
带符号	字母
带型	符号串
输入数据	公理
程序指令	推断规则
输出	定理

表 4.3　图灵机—形式系统对应

我们前面谈及希尔伯特的著名的判定问题（Entscheidungsproblem），它是问是否存在任何的算法过程，用以判定一个已知的符号串是或者不是某特定的形式系统的定理．使用表 4.3 中的在图灵机和形式系统之间的"同构"，图灵能将涉及形式系统中的定理的判定问题，翻译成它的用机器语言的等价的表示．我们已经看到这一计算等价物就是停机问题．它的否定性的解答暗示着判定问题的同样的令人沮丧的答案．因为大约现在你正想问的是：所有这些无意义的符号操作同日常的现实有什么关系？所以我们很快地将注意力从形式的东西转向内容．

我们如何从形式到内容，答案可用一个字给出：解释．我们立刻把兴趣集中在由数学事实所组成的日常现实的一部分．依赖于所考虑的数学结构的种类（例如，欧氏几何，初等算术，微积分，拓扑学等等），我们必须准备一套字典，用它能够将组成那一数学结构的对象，像点、线和数这样的东西，同我们想用来表示该结构的形式系统的抽象符号、串和规则等结起对子（也就是说，

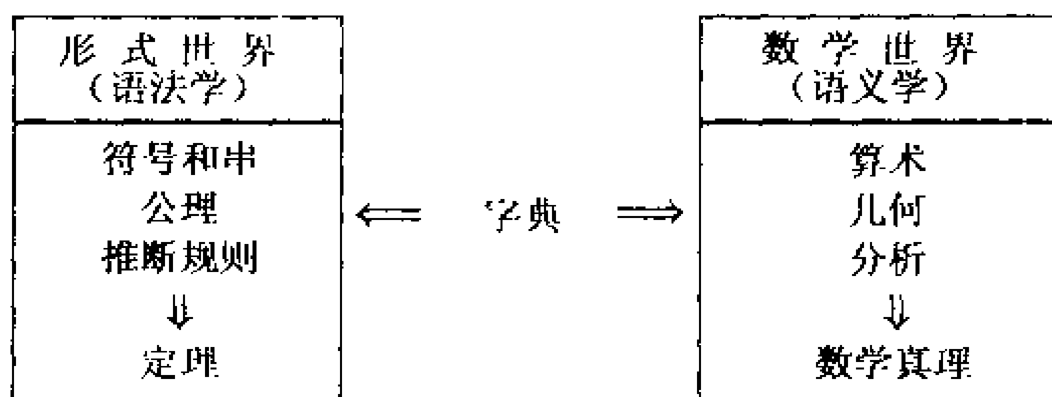


图 4.4 形式世界与数学世界

解释）．借助这一字典构成步骤，我们给由形式系统的符号组成的抽象的、纯粹语法学的串、附加以意义，或者语义学的内容．此后，该形式系统的全部定理就可以解释作关于与之相结合的数学对象的真实的陈述．图 4.4 显示了在形式系统的纯粹语法的世界，同富有意义的数学世界之间的这一决定性的区别．

一旦这一字典写成，并且相关联的解释建立了起来，我们就可以同希尔伯特一起，希望会在数学结构的真实事情同形式系统的定理之间，有个完美的一一对应．不严格地说，希尔伯特的梦想就是找一个形式系统，在其中每一条数学真理翻译为一个定理，以及反过来，每一定理解释为一数学真理．这样的系统称作是完全的．而且，如果一种数学结构是避免矛盾的，那么一条数学真理和它的反面应该永不能双双翻译为定理，也就是说，在形式系统中双双是可证明的．这样的其中没有相互矛盾的陈述可被证明的系统称作是相容的．掌握了这些初步的内容，我们终于可以来描述希尔伯特的规划的哥德尔毁灭．[156]

不 可 判 定

到希尔伯特的 1928 年波隆那演说之前，数学家已经确立几何命题以及所有其他类型的数学断言皆能改述作关于数的断

言．这样一来，数学整个的相容性问题就简约为确定算术的相容性．也就是说，简约为自然数（正整数 1，2，3，…）当中的性质和关系．这样问题就变为给出一种"算术的理论"，也就是说，一个形式系统，它是（1）可有限描述的，（2）相容的，（3）完全的，和（4）足够强有力的以表示关于自然数的能作的全部陈述．用可有限描述的这一术语，希尔伯特的意思是不仅系统的公理和规则的数目和长度应是可用有限步构建的，而且系统中每个可证明的陈述——每个定理——应当能以[157]有限多步骤证明．这一条件看来是足够合理的，因为你根本不真正拥有一种理论，除非你能够将它告诉其他的人．并且如果有无穷多条公理、规则，和/或者在证明序列中有无穷多个步骤，那么你肯定做不到将它告诉人．

在算术的任何这样的形式化方面出现的一个核心问题，是弄清是否存在有限的过程，用它能够判定每一个算术陈述是真理或是谬误．于是，例如如果作陈述"二奇数之和是偶数"，我们想要一个有限的过程——本质上是一计算机程序，——它在有限多步后停机，告诉我们此陈述在某个足够强有力以包含通常的算术的形式系统中是不是可证明的．例如，在上面考虑过的✠—★—✹形式系统中，这样的判定过程用如下不完全明显的条件给出，即"一个串是定理当且仅当（1）它以✠开头，（2）串的其余部分只由★和✹组成，和（3）✹的个数不是 3 的倍数"．

希尔伯特坚信解决上述的迫切问题的算术形式化是可能的，并且他的波隆那宣言向国际数学界提出挑战寻找或建立它．但在 1931 年，在希尔伯特的波隆那号召之后不到三年，哥德尔发表了下述的元数学的事实，或许这是本世纪最为著名的数学（以及哲学）结果．

哥德尔定理——非形式的叙述 *算术不是可完全地形式化的．*

记得对于算术有无穷多种方法，可在一形式系统中选择一组有限条公理和推断规则，以便试图语法学地来映照关于数的数学真理．哥德尔的结果宣布这些选择中没有一个能够运转：不存在也不可能存在一种形式系统满足希尔伯特的规划的全部要求．简言之，不存在能产生出关于自然数的全部真理的规则．

在得出他的算术不完全性的证明过程中，哥德尔的第一个决定性的观察是认识希尔伯特的如下洞察的重要性，即一个数学分支的每一种形式化，其本身就是一个数学对象，因为当我 158] 们说我们已"形式化了"某事物时，所指的是我们已创造了一个数学框架，在其中谈论我们想要形式化的无论什么东西．这样如果我们建立一个形式系统想去捕捉算术的真理，那么对此形式系统就可以不仅作为处理符号的一组无意识的规则，而且也作为一个具有数学的，也就是语义的，以及语法的性质的对象，来加以研究．具体说，由于哥德尔的兴趣在于数之间的关系，他的目的是在算术自身中表示任意的旨在包含算术的形式系统．基本上，这涉及到说明如何将关于数的和它们的关系的任意一个陈述，用数自身的一个唯一的元来编号．于是，哥德尔所发现的是一种将关于自然数之间的关系的全部陈述，用正是这同一些数自身映照出来的一种方法．

这种映照方法或许在那种用英语字来谈语言的普通语言文章中更为常见．例如，我们用字来描述字的性质，像它们是名词或是动词，我们讨论比方说，论英语语法的论文的结构，论文由字组成，用英语的其他的字讨论．这样一来，在两种情况中我们正以两种不同的方式在使用语言：(1) 作为字母符号的无解释的串的集合，按照语法学和英语语法的规则作处理，(2) 作为一组有解释的串，在进行讨论的上下文中具有其意义．这样，关键的概念是这同一组对象可以以两种十分不同的方式加以考虑，这开启了那些对象谈论其自身的可能性．顺便，我注意到完全相同的二元论思想，适用于在每个生命细胞

的基因物质（DNA）中的符号及其解释．DNA 链上的核甙酸基 A，G，C 和 T，可以被解释作建造蛋白质的指令，每一种生命组织由之得以形成，或者可以没有解释而简单地被复制，例如，当 DNA 在细胞分裂过程中被重复时就是这样．哥德尔发现了如何以使用自然数作表示来玩同样的技艺．

为了考察哥德尔的方法是如何运转的，我们考虑如在罗素[①] 和怀特海[②] 的具有纪念碑意义的论文《数学原理》（*Principia Mathematica*）中见到的符号逻辑语言的有点儿改进的文本．这一简缩的文本是 E·内格尔（Ernest Nagel）和 J·R·纽曼（James R. Newman）给出的．[159] 在这一小型的逻辑语言文本中，有一些基本的标号和变量．按照哥德尔的方案，假设有如表 4.4 所示的 10 个逻辑标号，每一个有其哥德尔编号数，是 1 到 10 之间的一个整数．

除基本标号外，《原理》的语言还包括逻辑变元，它们通过标号连接起来．这些变元在应用中分具三种不同的特色，表现出一种依赖于变元在所在的逻辑表达式中所扮演的恰当角色的层次次序．某些变元是数值的，意为它们可以取数值．另一些变元可以用整个的逻辑表达式或者公式来置换（命题变元）．最后是所谓的谓词变元，它表示数或者数值表达式的性质如素数、奇数，或者小于等．《数学原理》中的全部的逻辑表达式和可证明的关系，都可以用这三种类型的变量的组合写出来，且这些变量是通过逻辑标号连接起来的．对于我们的《原理》改进文本，只有 10 个逻辑标号，尽管在实际情况中要多许多．在《数学原理》的这一缩本中，哥德尔的数化系统用大于 10

① 译注：Bertrand Russell，1872.5.18～1970.2.2，是 20 世纪声誉卓著、影响深远思想家之一．

② 译注：Alfred North Whitehead，1861.2.15～1947.12.30，英国数学家、教育家和形而上学家．

的素数作为数值变元的编号，用大于 10 的素数的平方作为命题变元的编号，用大于 10 的素数的立方作为谓词变元的编号.

标号	哥德尔	意义
~	1	否定
∨	2	或者
⊃	3	如果……则
∃	4	存在
=	5	等于
0	6	零
s	7	紧接的后继者
(	8	标点
)	9	标点
′	10	标点

表 4.4 基本逻辑标号的哥德尔数化

为考察这一数化过程如何工作，考虑逻辑公式 $(\exists x)(x=\mathrm{s}y)$，翻译为明白的英语，读作："存在数 x 是数 y 的紧接 [160] 的后继者." 由于 x 和 y 是数值变量，哥德尔的编号规则规定赋以 $x\to 11$，$y\to 13$，因为 11 和 13 是大于 10 的头两个素数. 公式中的其他符号可以通过用表 4.4 中的对应关系替换以数而给出编号. 完成编号后产生数列 {8，4，11，9，8，11，5，7，13，9}，这是通过一个符号一个符号地遍读逻辑表达式，并且按编号规则代以适当的数而形成的. 这 10 个数的序列唯一地确立此一逻辑公式. 但因为数论——也就是说，算术——是关于单个数的，而不是数的序列的性质的，所以人们想能用单个数以一种无歧义的方式来表示公式. 哥德尔做到这一点的方法是取前 10 个素数（因为公式中有 10 个符号）并将它们乘起来，每个素数的幂次增高到等于公式中相应元素的 Gödel 数. 因为前 10 个素数依次是 2，3，5，7，11，13，17，19，23 和 29，所以我们作代换 $(\to 2^8$，$\exists\to 3^4$，$x\to 5^{11}$，等等. 上述公式的最后的 Gödel 数则是

$$(\exists x)(x=\mathrm{s}y)\to 2^8\times 3^4\times 5^{11}\times 7^9\times 11^8\times 13^{11}\times 17^5\times 19^7\times 23^{13}\times 29^9.$$

用这种数化方案，哥德尔能够给可用《数学原理》的逻辑语言表述的算术的每个陈述和陈述序列，都各附加一个唯一的数．这样用这一方案，每一个关于自然数的可能的命题都可以表示作自然数本身中的一个数．由此打开了用算术考察它自己的真理的可能性．

深入的洞察和深奥的结果必然依赖于能立即领悟几种思想间的联系．在哥德尔定理的证明中，有两个哥德尔所必须同时思考的最为重要的概念．哥德尔数化是第一个．现在谈第二个大思想，数学证明的概念代替日常的真理概念，以及词句陈述的逻辑悖论翻译为算术的陈述．

困扰着希尔伯特的那一类逻辑悖论，都是以自引用的概念为基础的，也就是说，它们全都包含有一些陈述是引用它们自身的．所有这些含义双关的谜语般的话的鼻祖是所谓的说谎者悖论，它的一种文本是

[161] 这个句子是错误的．

现在看这为什么是一个悖论？好，在日常用语中说"某件事情"是错误的，意指它同真实不相符合．该句子说它是错误的．如果这一断言不符合于真实，那么该句子必须是正确的．另一方面，如果该句子正确，这意味着它所说的正符合真实．然而这一正确的句子说它是错的．因此，该句子必须确实是错的．这样无论你假设此句子是正确的或者是错误的，你都被迫作出相互抵触的结论！于是，此为说谎者的悖论．

哥德尔想要做的是寻找一种方法，以在算术的框架中表达这样的悖论式的自相引用的陈述．他需要这样一个陈述，以展示希尔伯特的论题的一个例外，该论题说，所有正确的断言在一个形式系统中都应是可证明的．然而，像说谎者悖论这样的陈述涉及到真理的概念，某种为逻辑学家 A·塔斯基（Alfred

Tarski）早期已经证明是不可能被放入一个形式系统的疆界之内的东西. 现在进入哥德尔的大思想 # 2.

绕开处理永远难以解释的真理概念，哥德尔的洞察力使之想到用某个可形式化的东西代替"真理"，即可证明性的概念. 于是，他将上述的说谎者悖论变更为哥德尔句子

这个陈述不是可证明的.

这个句子当然是一个关于特定的"陈述"，即句中所提到的那个陈述的自相引用的说法. 然而，哥德尔用他的数化方案，能够用一对应的自相引用的，用算术自身的语言表述的元数学的陈述，来将这一断言编号. 现在顺着这一映照法的逻辑结果看下去.

如果弄清楚了所引用的陈述是可证明的，那么据哥德尔的真理同证明的相等同，该陈述必须是正确的. 因此，它所说的必须是正确的. 但它所说的是它不是可证明的. 结果，该陈述以及它的反面二者都是可证明的，这暗示了在证明的逻辑方案中的一种不相容性. 另一方面，如果所引用的陈述不是可证明的，那么情况的确如它所断言的，也就是说，该陈述是正确的，但不可证明的. 这样一来，就有了一个真实的陈述却是不可证明的，这暗示着我们正在使用来证明陈述的形式系统是不完全的. [162]

记住哥德尔所证明的是如何将词句的自相引用的陈述，翻译成数学家们为了证明算术陈述所接受的形式系统以内的等价的陈述. 这意味着将我们刚刚引出的关于不相容性和不完全性的逻辑结论，应用于数的整个数学设施上. 这样一来，如果用于算术的形式系统是相容的，那么它必然是不完全的.

哥德尔能够证明，对于任意的相容的形式系统，又足够强有力使之能表达普通算术的全部陈述的话，这样的哥德尔句子必定存在；从而，此形式化必然是不完全的. 基本意思就是在每一个相容的而又足够强有力至可表达整数中的所有的关系的形式系统

中，都存在一个陈述是不能用该系统的规则证明的．虽然如此，这一陈述表示关于数的一个真实的断言．跳出到该系统外可以看出它是正确的．差不多作为一个旁白，哥德尔也证明了如何去构造一个算术陈述 A，它翻译成元数学的说法为“算术是相容的”．然后他证明陈述 A 不是可证明的，这暗示算术的相容性不能通过使用任意的表示算术自身的形式系统而建立起来．将所有这些不同的概念放到一起，我们最后得到下述定理．

哥德尔定理——形式逻辑叙述 对算术的每一种相容的形式化，都存在在此形式系统之内不是可证明的算术真理．

由于通向哥德尔的令人吃惊的结论的步骤，既是逻辑上难处理的，又是错综复杂纠缠一起的，我沿着表 4.5 中的路线，综述主要的有标志性的事件．

哥德尔数化：发展一种编号方案，以将《数学原理》的每一个逻辑公式和证明序列翻译成关于自然数的一种“镜子映象”式表示的陈述．

⇓

说谎者悖论：用“可证明性”概念代替“真理”概念，据此将说谎者悖论翻译成断言“这一陈述是不可证明的”．

⇓

哥德尔句子：证明句子“这一陈述是不可证明的”在算术的每一种可接受的形式化中，都有一个算术副本，即其哥德尔句子 G．

⇓

不完全性：证明哥德尔句子 G 必须是正确的，但却是不可证明的，如果形式系统为相容的话．

⇓

不可避免条款：证明即使添以附加的公理形成新的系统，在其中 G 是可证明的，此一带有附加的公理的新系统仍将有其自己的不可证明的哥德尔句子．

⇓

相容性：构造一个算术陈述 A，断言“算术是相容的”．证明这一算术陈述不是可证明的，于是表明算术作为一个形式系统过于软弱以至不能证明它自己的相容性．

表 4.5 哥德尔证明中的主要步骤

对言词表示的意义观察入微的读者此刻会注意到，在图灵的和哥德尔的结果之间的引人注意的类似性．但对于那些没有注意到的读者，我更为明确地详细说明一下这一类似性．这里是两个结果的复述，它抓住了那两个定理的加以浓缩了的本质： 163]

哥德尔定理 对于任何旨在解决，也就是说，证明或者反证明算术的所有的陈述的相容的形式系统 ***F***，存在一个算术命题，它在该系统中可以既未被证明，也未被否证．因此，形式系统 ***F*** 是不完全的．

停机定理 对于任意旨在解决所有的图灵机程序停机或者不停机问题的图灵机程序 ***H***，存在程序 ***P*** 和输入数据 ***I***，使得程序 ***H*** 不能确定 ***P*** 在加工数据 ***I*** 时是否会停机．

在按这一方式并排地列出后，我想，显而易见，停机定理简直就是用计算机和程序的术语代替用逻辑演绎系统的语言来表述的哥德尔定理． 164]

停机问题的图灵解和停机问题同希尔伯特的判定问题的等价性，与在图灵机和形式系统之间的可靠的对应一起，使我们能得出结论说，不存在图灵机程序能给出全部的真实的算术陈述．

哥德尔的结果表明，存在关于数的陈述，我们能看出它是正确的，——但却不能通过按照逻辑推理步骤来证明它．换句话说，没有单个一组规则能为关于数的所有可能的正确陈述作出巧辩；真理是严格大于证明的．某些哲学家已在拿这一点去说人类智力以某种方法超越演绎推理的力量．从这里得出我们永远不能创造出有等于人类智慧的能力的计算机的结论只还差一小步，因为计算机就它们所能产生的真理，完全等价于按一形式的逻辑系统的规则所能得出的那些东西．现在对这一反对有智力状态和思考而恰如你和我一样的机器的哥德尔论据、作

一较为严格的考察.

制 造 智 慧

1950年，图灵发表了论文:《计算机和智力》(*Computing Machinery and Intelligence*)，它引发出一场辩论，激烈地进行到今天．辩论的问题是：机器会思考吗？图灵的论文除了在引起对机器智力的注意方面所起的重要作用外，也因引入了一种操作试验以判定机器是否真在思考—— 以人类的方式，而值得注意．这一判定标准，现称作图灵试验，本质上是满不在乎的行为主义的，难免会使机器欺骗人类质询者，使之仅仅基于机器所做的，完全忽略它的材料结构，以及特别是它如何做它所做的，而认为它真的是人．图灵提出他所称的“模仿对策”的基本理由是，我们为了判定别的人是否正在思考，唯一的方法是观察他们的行为．如果这一标准足以判定人是否在思考，那么公平地对待机器，就只能是[165]这一标准对于它们也是足够好的．

在1991年11月8日，波士顿计算机博物馆举行了世界第一次亲历实习的图灵试验，在试验中有8个程序同人类调查考就一限定范围的话题交谈，话题包括女人的衣着，亲属关系，以及白兰地酒等．在那一天结束时，裁判将一等奖授予称作PC Therapist Ⅲ的程序．它是设计来用一种难以预料的毫无特别内容的会话同它的提问者对阵的．为了以例子说明这样的程序所生成的那种对话，下面给出另一个选手，程序Good Mood与其质询者之一交谈的片断，这一程序是为一个电子心理分析者设计的．Good Mood以同质询者说“或许你没有从你亲属中的伙伴那里得到足够的爱”来开始谈话．质询者回问：“在亲属中为了防止冲突或问题，最重要的因素是什么?”机器的应答是“我想你不认为我在思考”．

这一类交谈没有怎么欺骗裁判，大多数裁判说他们能够认

出根源在于缺乏日常的常识而导致的错误，而直接从展示在由人控制的终端上的应答指出这些计算机程序．虽然如此，从这一历史性的实验得出的总的结论或许是，图灵试验不是如很多人原来所想象的那样困难，因为在这次竞赛中即使幼稚的程序在大多数时间也欺骗了某些裁判．当然，我们应当记住这不是一次真正的图灵试验，因为会话的范围是严格地限制的．但它仍是一个相当好的最初的近似．

图灵试验表现一个第三者对人类智力的方方面面的观察，包括站在系统之外，仅仅通过观察机器的行为输出来洞悉机器的像人类那样的智力．该试验对于机器的内部构造，它的程序如何做成，加工单元的构造，或它的材料成分等什么也没有说．在图灵的智力观中，只计外部观察到的行为．且如果你的行为像我们一样，那你就是思考机器．

在 1989 年，理论物理学家罗杰·彭罗塞[①] 出版了《皇帝的新脑》（*The Emperor's New Mind*）一书．书的中心论点是人类的智慧有能力超越理性思维，所以永远不能在机器中复制出来．在继续讲下去之前，先让我注明一下，我们正在以如下的生硬的意义使用理性思维这个术语，即追随一组规则或者一个算法，以便用逻辑演绎推理的过程得到结果．这同将理性解释作同利己的或谨慎的活动相联系的日常的、经济学的解释没有任何联系．这样，彭罗塞所论及的是，至少有某些人的思考过程不包括追随任何类型的规则．他求助于作为人类意识和智力基础的大脑中的量子力学过程，以一种激烈的思辨性为他的说法辩护．彭罗塞的论据中的一个关键的组成部分是哥德尔的结果，该结果证明存在真实的算术陈述，它是人类智慧能知道的，但却不可能是追随一组固定的规则（也就是说，一个计算

[166]

① 译注：Roger Penrose，1931．8．8～，英国数学家和相对论学者．

机程序）的所得结果．此处彭罗塞正在重现原来由牛津哲学家约翰·卢卡斯（John Lucas）在 1961 年所提出的攻击路线．为了稍微更好一点地理解在哥德尔定理和展现人类式智力的机器的可能局限之间的联系，我们稍更认真些观察一下成为卢卡斯和彭罗塞二人的说法的基础的推理链．

哥德尔的定理说明，任何合理地丰富的形式系统都是不完全的，并且这样一个系统的相容性不可能在系统自身中证明．进而，在图灵的工作中我们看到，形式系统和机器，就它们按照从给定的假设逻辑地产生真确结论的方式所能做的而言，是等价的．因此，计算机服从如哥德尔所加在任何形式系统上的相同的限制．因此，卢卡斯和彭罗塞利用这一事实，跳到如下结论，即机器与生俱来地受限制于它们所能做的，并且，特别地，存在着智慧知其为真，但机器却不能证明的陈述．足够有意思的是，图灵在他 1950 年的关于思维机器的经典论文中，预言了这类对机器智能的异议，在文中他回答说，人或许也服从类似的限制．然而，卢卡斯没有被图灵的回答所说服，并在他 1961 年的题为《智慧、机器和哥德尔》（*Minds, Machines, and Gödel*）的论文中，试图去强化哥德尔的论证以反对智慧是一种机器的观点．

卢卡斯和彭罗塞二者论证的核心都是如下的做法．通过站在不完全的、相容的形式系统之外，哥德尔的结果暗示人类能知道存在某个正确的但却不可证明的陈述．但是机器不能证明这一事实；因此，人能胜过每一台机器，因为这样一个正确的但不可证明的陈述对每一台机器都存在．进而，假如人类智力同形式系统一模一样，那么由哥德尔第二定理，智力就不能证明它自己的相容性．但是人类的确断言他们自己的相容性．因此，智力肯定强于机器．[167]

正如差不多所有的哲学辩论那样，反对卢卡斯的各种论辩皆以他所给出的术语像机器、相容性、和智力等的精确意义，以及以支持他的结论的隐蔽的假设为转移．例如，P·贝纳塞

拉夫（Paul Benacerraf）指出，卢卡斯过分限制了对机器的看法，因为任何能够自身改编程序的机器可不包括在哥德尔的论证之内．进而也注意到，卢卡斯假设智力是相容的．事实上，这远不是显然的，像C·H·惠特利（C．H．Whitley）所构造的下述悖论所表明的那样．

考虑句子“卢卡斯不能前后一致地断定这一句子”．卢卡斯不能断定这一句子的真理性，即使他能清楚地看出它是真的．为什么呢？因为假如卢卡斯能断定它，那么此事会损坏他的假设的相容性．因此，或者有某件事卢卡斯能看出是真实的但却不能断定它，或者他是不相容的．惠特利作结论说卢卡斯过高地评价了人类，因为即使有一不可证明的陈述，一特定的机器不能断定它，人类也总是不能做到．

另一些反对卢卡斯的论辩说他在应用哥德尔的结果中有偏差．例如，哥德尔定理仅证明，机器 M 不能从它的公理和按它的推断规则证明 M 的哥德尔句子．但是人类智力也不能证明哥德尔句子，至少不能通过使用可用于该机器的公理和推断规则来证明．进而，卢卡斯未表明他能在任何机器中找到缺陷，只有那些机械师能够建造的机器除外．这样，在为这一对智慧、机器和人造才智的讨论作结论时，听一听哥德尔本人关于此事所必须说的，是有一定意义的．

遗憾的是，哥德尔宁肯隐居而不愿为人所知，特别是在他的晚年，而他就此话题仅有的发表出来的陈述就是他在1951年对美国数学会（American Mathematical Society）的演讲：

> 人类智慧没有能力用公式表述（或者机械化）它的所有的数学直觉，亦即如果它成功地用公式表述了它们中的某一些，正是这一事实产生新的直观的知识，例如这一形式主义的相容性．这一事实可以称作数学的“不完全性”．另一方面，在迄今已证明的结果的基础上，仍然可能会存在［168］（并且甚至是只凭经验即可以发现的）一种定理证明机器，

它事实上是同数学直觉等价的，但不能被证明是如此，甚至也不能被证明产生有限性数论的全是正确的定理．

这样一来，哥德尔让存在定理证明机的可能性敞开着，并且甚至是承认或许可能通过只凭经验的研究来发现这样的机器．于是，他说会存在一种机器，其能力等同于人类的数学直觉，但它的程序我们永远也不会理解．虽然如此，我们也许有能力，例如，通过进化来创立导致这样的机器存在的条件．所以，太过复杂以至不能设计的机器仍然可能出现．

随同关于对人类智慧来说过于复杂以至不能设计或理解的程序的这一陈述，哥德尔要求我们直接面对如何表征和如何度量一个计算机程序的复杂性的问题．这一研究已导致了对哥德尔关于机械推理的局限性的原有结果的新的和深入的洞察．这些新的结果转而又提出了一系列的疑问，是关于科学本身作为在现实意义下获得"事情的筹划"的一种方法的．所以我们将注意力转向考虑在人类的推理到达其极限之前可能得到多么"复杂"的事情．

限度就是可数无穷

几年以前，《科学美国人》（*Scientific American*）专栏作家马丁·加德纳（Martin Gardner）引入了在"无趣的"和"有趣的"数之间的一种区分．按照加德纳的区分，有趣的数是那些具有某种特殊的样式或特性，以从所有其他的数分离出来的数．另一方面，无趣的数是所有那些不是有趣的数的数．然后，加德纳通过证明无趣的数不可能存在去证明这个二分的悖论性质．他的论证是首先将整数按次序列表，令 D 代表此表中的第一个无趣的数．然而正是 D 是第一个无趣的数这一事实使得它是有趣的！因此，不可能有无趣的数．

打破这一种悖论怪圈的一种方法是，定义一个数是有趣的，如果它能用一个比该数本身更短的（也就是说，二进制位数更

少的）程序来计算. 这样一个短程序将囊括该数的某些可据以将之从一般的数中区别出来的特别之点. 比照起来，无趣的数将是那些在算法上不能压缩的数，意思是它们没有包含一种样式能被开发用来减小它们的最小程序的长度. 称这样的"无样式的"数为随机的是合理的. 显然，数的大多数在这一意义上是随机的，因为对任意的 n，长度不大于 n 个二进制位的数的数目，是用不长于 $n-1$ 个二进制位作为其较短描述的数的个数的两倍还多. 这是因为长度小于或者等于 n 个二进制位的数刚好有 $1+2+4+\cdots+2^n$ 个. 这样长度不超过 n 个二进制位的数、与不长于 $n-1$ 个二进制位的数的数目之比是

$$\frac{1+2+4+\cdots+2^n}{1+2+4+\cdots+2^{n-1}}=2+\frac{1}{2^n-1}>2.$$

这一用最短的计算机程序的长度来表征一个数的复杂性的思想，是由 G·柴丁（Gregory Chaitin）和柯尔莫哥洛夫[1] 在 1960 年代分别独立引入的. 柴丁稍后用这一概念证明过哥德尔定理的下述说法.

哥德尔定理——复杂性的叙述 虽然几乎所有的数都是随机的，但不存在形式的公理系统使我们能证明这一事实.

我们可以将这一不寻常的结果更为明确地表示如下. 假设我们有一个形式系统，它的公理和推理规则要用 n 个二进制位来表示，也就是说，这一系统的图灵机程序长度为 n 个二进制位. 那么这一系统就不能证明任何比 n 个二进制位更长的数的随机性. 为什么呢？好，假如在这一系统中有一个证明，确立一个实际上长于 n 个二进制位的数的随机性. 那么

---

[1] 译注：Andrei Kolmogorov，1903.4.25 - 1987.10.20，是 20 世纪最有影响的苏联数学家.

我们就有一个 n 位的程序能打印出这个随机数．但由定义，该数的随机性意味着不存在较该数为短的程序能产生出该数．[170] 于是得出矛盾，它表明这样的程序根本不存在．这等于是说出了如下的颇为常识性的事实的一个数学证明，即你不可能从一个系统得到比你放到系统中的更多的信息．就像乔治亚理工学院（Georgia Tech.）的物理学家 J·福特（Joseph Ford）有一次所提出的，“一个10磅的理论产生一个20磅的定理，这不会比100磅的孕妇生出一个200磅的孩子更有可能”．（当然，福特在这里是说的妇女在怀着她的未出生孩子时的体重．）

停机概率

在前面，我们通过忙碌海狸函数和图灵机对策给出了不可计算的量的例子．柴丁则利用了算法复杂性的概念以便产生一个这样的数的甚至更为戏剧性的例子，他称作 Ω（“欧米伽”）的某个东西．它同上面讨论过的停机问题密切相关．柴丁定义 Ω 是一个为通用图灵机随机地产生的程序会停机的概率．此处当我们说程序是“随机地”产生的，意指无论何时计算机需要另一输入位，我们就简单地掷一枚公平的硬币，并且比如说当头像向上时，给计算机一个1，当硬币出现反面时给以0．因为表4．1已告诉我们每一个图灵机程序都代码化为一个二进制串，所以这一过程是完全合理的．现在假设我们生成了大量的这种随机程序，其中的每一个跟其他的都是统计地独立的，并且运行其每一个，比如说，一百万步．那些在一百万步之前停机的，同那些未停机的程序个数之比①，构成数 Ω 的一个下[171] 界．如果将步数从一百万增至无穷，这一比值将收敛到 Ω．

一旦 UTM 的专用的语言规定出来，量 Ω 就是0和1之间

① 译注：此处应当是同程序的总个数之比．

的一个完全确定的数．对于我们所熟悉的那些种类的程序设计语言，如像 Fortran、C 或者 Pascal，Ω 似乎是很接近于 1，因为一个用这些语言之一随机地生成的程序，远更可能由于一个语法错误而立刻突然停止，而不是进入无穷的循环．虽然如此，可以证明 Ω 在开头的几位数字之后将会看起来是非常随机的．使得 Ω 就计算的理论发展而言是令人感兴趣的，其原因在于它以一种非常紧凑的形式将停机问题代码化．例如，知道 Ω 的前 n 位二进制数字就能够解决任何长度为直到 n 个二进制位的程序的停机问题．方法如下．

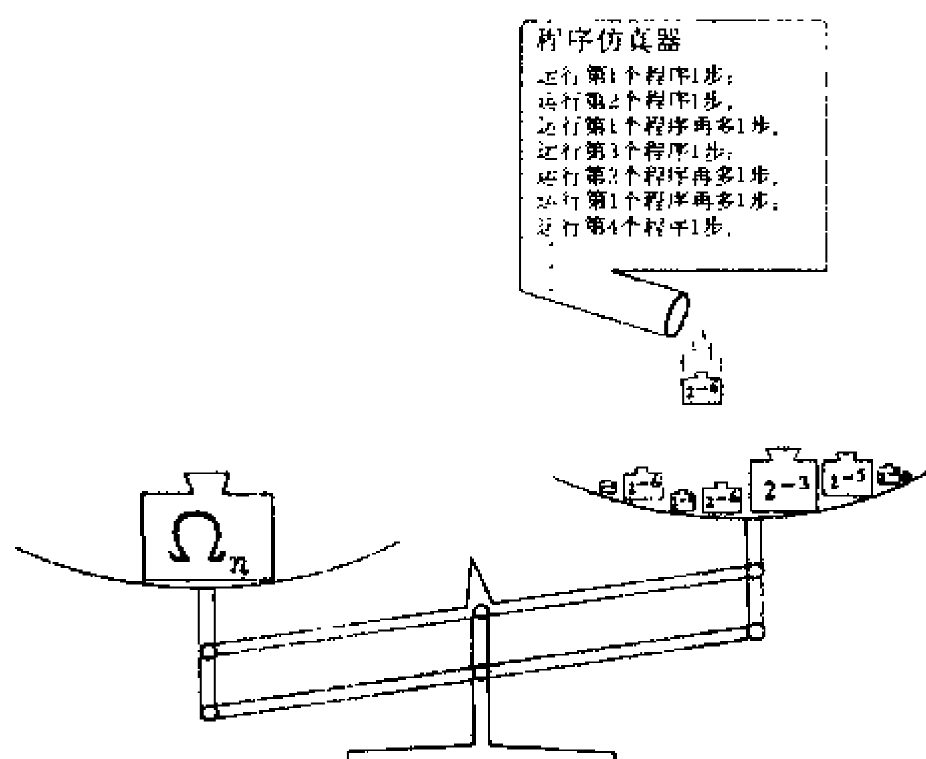


图 4.5 用 Ω 解停机问题

假设我们想解答随机生成的一个特定的 n 位长程序 $\boldsymbol{P}$ 的停机问题．程序 $\boldsymbol{P}$ 对应于一个特定的 n 次硬币投掷序列，其出现概率为 2^{-n}．如果 $\boldsymbol{P}$ 停机，这样大的一个概率则为整个停机概率 Ω 的一部分．现在令 Ω_n 是 Ω 的已知的前 n 位二进制数字给出的值．这说明 Ω 大于 Ω_n 和小于 $\Omega_n + 2^{-n}$．于是，为了判定程序 $\boldsymbol{P}$ 是否

停机，我们开始对所有的停机的程序——不管其长度，作系统性的搜索．首先运行一个程序，然后运行另一个，运行时间越来越长，直到我们看到了足够多的停机程序，由之计算出的比例数大于总概率的 Ω_n 部分．图 4.5 显示了这个一般的想法．然后，P 或者在这些迄今已停机的程序当中，或者它是永不停止的．这是因为它的停机将推高总概率超过其已知的上界 $\Omega_n + 2^{-n}$．

Ω 的知识不但可以用于解停机问题，而且也可用于解决数学中的很多著名的尚未证明的猜想．例如，著名的黎曼[①]假设，断言黎曼 ζ 函数的所有 0 点都在复平面的直线 $\mathrm{Re}z = \frac{1}{2}$ 上，这等价于断定某个在这条不可思议的直线之外系统地搜索 0 点的程序将永不停机．这一类猜想通常都足够简单，使得可以用小程序的停机来将它们编码，这所谓小程序一般其长度不超过几千个二进制位．结果是，我们能够解决所有这些猜想，只要我们知道 Ω 的前几千位二进制数字就行．

这一完整的论证线索可以扩展到多类形式如"命题 P 在形式系统 $\boldsymbol{F}$ 中是可证明的"的陈述．如果假设命题 P 和系统 $\boldsymbol{F}$ 一起共需要 n 个二进制位来描述，则存在某个程序，长将近 n 个二进制位，它停机当且仅当 P 在 $\boldsymbol{F}$ 中是可证明的．这样一来，对于简单到足以为人类智慧所理解的任何的命题 P 和系统 $\boldsymbol{F}$，Ω 的前几千个二进位数足可判定下列何者为真：（1）P 在 $\boldsymbol{F}$ 中是可证明的；（2）非 P 在 $\boldsymbol{F}$ 中是可证明的；（3）P 是不依赖于 $\boldsymbol{F}$ 的公理的．

在我们所叙之事中的这一点上，下述情况或许会使读者认为是古怪的——或者完全似是而非的——这就是 Ω 能包含关于停机问题的如此多的信息，却还是同用投掷硬币所得到的随机序列在

① 译注：Georg Friedrich Bernhard Riemann，1826．9．17～1866．7．20，伟大的德国数学家

计算上是不能区别的．这一古怪现象的解释像它的不同寻常一样的直接．事实是 Ω 是一项完全提供信息的消息．也就是说所有多余的东西都已被挤出．于是它正好显得是随机的，因为没有一个“多余的”二进制位留在它里面．这意味着 Ω 是纯信息．

Ω 几乎包含了人们所能提出的任何一个问题的答案这一事实，促使 IBM 物理学家 C·贝内特（Charles Bennett）称 Ω 为“玄妙的”数．它是通过人类理性能够略知但不能熟识的．像贝内特所说的．

> 它搜集了许多数学知识在一非常小的空间之内，由于它的前几千位数字包含了较之在整个宇宙所能写下的更多的数学问题的答案——包括所有的有限可驳倒的猜想，它的数字准确地说是无用的，因为它们是写有生的；从它们一个停机问题求出其解，仅有的已知方法……是对每一项作出大的计算，而这将同时产生所有其他同等简单陈述的停机问题的解……．出乎意料的是，虽然 Ω 不能计算，但它可能偶然地由一种随机的过程产生出来，例如，用一个公正的硬币投掷，或者用一次山崩后山坡上大鹅卵石的模式所表示出的数字．Ω 的开始几位数字像这样或许已经被记录在宇宙中的某个地方．遗憾的是，对这一财富，没有一项人类的发现能够证实它的真实性或者实际使用它．

173

基于这个苦乐参半的注记，我们现将注意力从可以略知但从未计算过的神秘的量，转移到原则上可以计算，但或许将永远不会被熟识的量．迄今，我们集中谈在可计算的量——给以无限的时间和存储量——和那些像忙碌海狸函数或者 Ω 的量之间的区别，后者在逻辑上是不可计算的，即使无限制地用我们所支配的计算资源．这一区别是有重大的理论意义的；然而，从实际的观点可以明白，有一些量在理论上按图灵机判据是可计算的，但即使使用要建造的最快的超级计算机，所用的

时间也要比宇宙的年龄还长．我们用本章余下的篇幅说明这--计算难处理性．

难 耐 时 间

娱乐数学的--个著名问题是所谓的河内塔．在此问题中，有三个木桩 A，B 和 C，有 N 个环，半径依次减小堆积在第一个木桩 A 上．另外两个木桩开始时是空的．要做的是将环

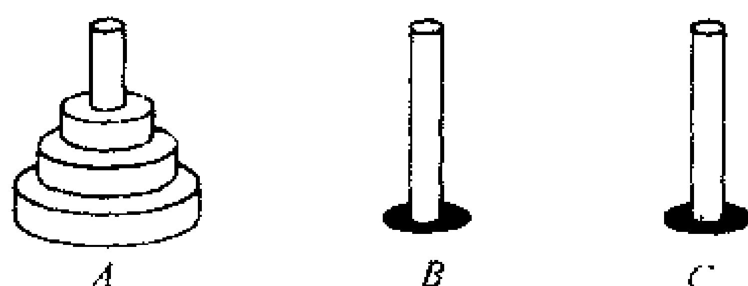


图 4.6 河内塔游戏

从 A 转移到 B 上，转移过程中或许要用到木桩 C．规则规定这些环一次只能移动--个，并且--个环永不能放在比它小的环上．图 4.6 显示了 $N=3$ 情形的该问题．

在三个环的情形，不难发现 7 次移动的序列：

$$A\to B,\quad A\to C,\quad B\to C,\quad A\to B,$$
$$C\to A,\quad C\to B,\quad A\to B$$

就能完成所要求的环的转移．并且，事实上，可以证明存在解任意 n 个环的这一游戏的一般的算法，也就是说程序．这一程序表明所需要的转移次数最小为 2^n-1．有趣的是，这一难解的游戏的原本，追溯到中国古代的西藏，是包含 $n=64$ 个环的．所以不难看到为什么创始这--游戏的西藏的僧侣，声称世界的末日在所有这 64 个环被正确地堆积于木桩 B 上的时候．为了完成所需要的 $2^{64}-1$ 步转移，即使每 10 秒钟转移一个环，也将要用 5 万亿年以上！如此，解河内塔问题所需的步数，随环数 n 指数地增长．

这是“难”计算的问题——为获得一个解，所需要的计算步的数目随问题的“规模”而指数地增长的问题的一个例子.

作为对比，一个计算上“容易”的问题是将一副扑克牌按升序分类成4组．首先遍查这副牌直到找到黑桃A．将它放到一边，然后再遍查剩下的牌，直到找到黑桃2，也将它放到一边．按这一方式继续下去，整副牌可完全分类开．这一分类方法所能出现的最坏情况是，黑桃A是未分类牌中的最后一张，黑桃2是倒数第2张、等等．如此以 n 张牌开始，你最多必须考察 n^2 张牌．于是，将一副牌完全分类所需要的步数，是问题规模的，也就是说一副牌中牌的张数的一个二次函数.

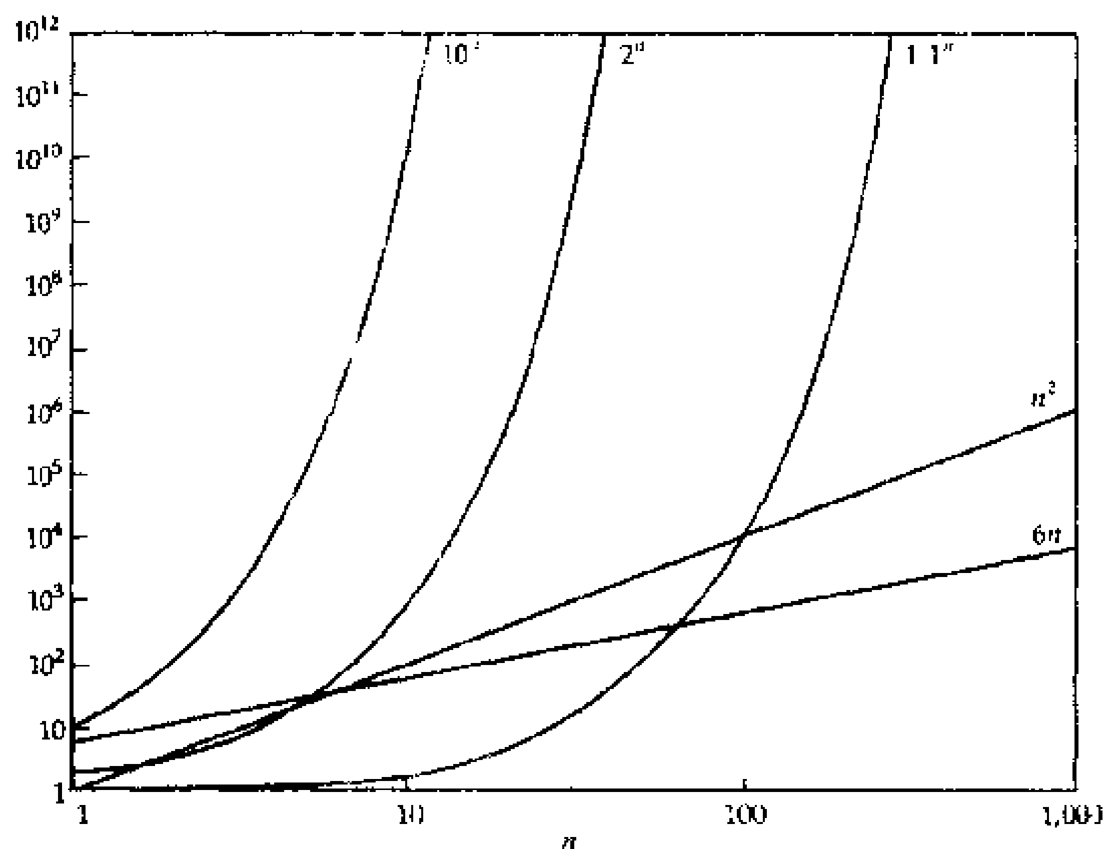


图 4.7 函数的多项式增长和指数增长

在1960年代中期，J·埃德蒙（J. Edmonds）和A·科伯姆（A. Cobham）引入了将问题的计算难度分类的概念，是按照

问题是否存在一个求解算法要求至多为问题规模的多项式数目的计算步．“容易”问题可以用多项式时间解出；反之，“难”问题要求随问题规模的增长而指数地增大的步数．这两种增长速度的差别显示在图 4.7 中．在图中我们看到，一个多项式函数实际上对于规模 n 的不大的值可以超过指数地增大的函数．但随着 n 的继续增长，指数的总是要胜过多项式的．为确定起见，称一个算法是以多项式时间运行的，如果存在固定的整数 A 和 k，使得对于规模为 n 的问题，其计算会以最多 An^k 步完成．为后面引用，我们令 P 是以多项式时间运行的问题类．不是以多项式时间运行的算法称作是以指数时间运行的．因此，解规模为 n 的问题要求 2^n 或者 $n!$ 步的算法是指数时间算法．

[175]

暂时离开一下话题，这里值得注意，分为难问题和容易问题的这一分类，在面对你实际作的计算时，有可能会产生一点儿误解．例如，一个算法其 $A = 10^{50}$ 和 $k = 500$，将仍是以多项式时间运行的．而这样一个算法在任何实际意义上都几乎不会是“有效的”．相反，同一问题的一个算法，以 2^n 数量级的步数运行，对于适度大小的 n 值，完全有可能比多项式时间的方法更合人意——尽管它在理论上是“无效率的”．于是读者应当记住，我们此处所谈的，是计算的理论，而不是它的实践．然而，在实践中看来是，问题是可解的，仅是不论用指数时间算法，或用多项式时间算法，都是在类似于 $10n^2$ 或者 $50n^3$ 的某个数量级的，或者更少的步数内运行的．

[176]

P 和 NP

有一类非常重要的问题，称作 NP，它代表“非确定性的多项式时间”．我要赶快指出这并不意味着关于这样的问题有什么事情是模糊的、随机的、或者不确定的．更确切地说，一

个问题，如果可以用随其规模而多项式地增长的步数来验证一个推荐的解，则此问题归类为 NP. 这样如果你恰巧偶然发现你想象中的是 NP 中一个问题的解，那么你可以用多项式时间验证它的确是解，或者驳斥它是解的结论. 一个很好的例子是求解一种拼图玩具的问题. 如果这一拼图有大量的块，要正确地将它们拼到一起是很难的. 但是要检验任何特定的组装法真正是该拼图的一个正确的解却是容易的：只要看一下就行了. 显然，多项式时间问题是 NP 问题的一个子集. 下面是也属于 NP 的其他问题的几个例子：

- **路径选择问题**：假设你是一个销售人员，必须访问一些城市中的客户，并且你想使你的环行访问不要访问任何城市多于一次. 已知城市和连接它们的道路的网络. 问是否有一路线其出发点和结束点在同一城市，并且访问另外的每个城市都恰只一次？
- **指派问题**：已知关于讲课时间、学生和课程的信息，是否对每个学生存在无冲突的时间表？
- **地图着色问题**：是否存在一种只用 3 种颜色为地图着色的方法，以便没有两个有共同边界线（多于一个单点）的国家有相同的颜色？
- **装箱问题**：给定一组包裹以及它们各个的尺寸，给定一组完全相同的箱子. 是否存在一种包裹归箱的指派，使得每一个包裹都可放在箱子中而没有使任何一个箱容纳不下？

在 NP 中有许多个问题尚不知道它们是否也在 P 中. 例如，对 n 个变量加以 n 个线性约束是否有整数解的问题，像在下一章中将要看到的，这在最优化理论中是十分重要的. 对这一问题的判定，现在还没有已知的多项式时间方法. 虽说到目前为止还没有一个严格的证明表明 $P \neq NP$，但若弄明白了情

况不是这样，大多数计算机科学家会被震动到极度紧张症的状态．主要理由之一是非常大数目的 NP 问题已全被证明就下列意义是等价的，即它们中若有一个弄清楚了是在 P 中，那么它们全都在 P 中．

这一事实，为 S·库克（Stephen Cook）在 1971 所证明，或许是计算复杂性理论的核心结果．它用以驱动在该领域的工作，因为它说为了驳斥 P = NP 的断言，所有我们需要做的就是生成 NP 问题的一个单独的例子，对它不可能存在得其解的多项式时间算法．然而迄今尚无人完成寻找这一令人困惑的反例的工作．谁会知道，或许断言 P = NP 将弄明白是一个不可判定的命题，因而不依赖于数学的通常的公理框架，正如著名的连续统假设在 1960 年代被证明既不是可证明的也不是不可证明的那样．或许是．

计算的模型

通用图灵机是一种用于将施于整数上的计算的概念形式化的装置：它以一个整数输入（一个包含程序 ***P*** 和输入数据 ***I*** 的描述的 0 和 1 的长串）开始，产生一个二进制串（输出）——倘若程序 ***P*** 在加工输入 ***I*** 时最终会停机的话．这是一个为当我们说完成一项“计算”时所意味着的事情而建的模型．而且在现实的、铅笔和纸计算的这个图灵机理想化的数学框架之内，我们看到某些数是可计算的，而很多其他的数却不是．但是也可能有其他的计算的模型．[178]

在 1980 年代中期，伯克利的数学家 S·斯梅尔对数值分析的基础发生了兴趣，并从而开始以如下问题来打扰数值分析学家，“算法是什么?”他报告说他通常听不到对此问题的令人满意的回答——只有一次例外．当要求描写一个算法时，A·伊瑟尔（Arieh Iserles）回答，“一个 FORTRAN 程序”．得到这一暗示，斯梅尔和他的同事 L·布鲁姆（Lenore Blum）和 M·舒勃

（Mike Shub）一起，发展了一个计算的模型，它可以看作是一个 FORTRAN 程序的数学理想化.

计算的布鲁姆—舒勃—斯梅尔（BBS）模型，是计算机程序的流程图的简单的抽象. 图 4.8，一个为使用牛顿法，取实数输入 x，来求一个实数 c 的近似的平方根的流程图，表明了他们的基本思想. 计算的 BBS 模型的基本组成部分全都包含在这一流程图中. 它们是：

1. **输入**空间.（此处，为实数集.）
2. **输出**空间.（此处，也是实数集.）
3. **状态**空间，计算在其中进行.$\left(\text{在此情况，计算仅是运算 } x\rightarrow\frac{1}{2}\left(x+\frac{c}{x}\right).\right)$
4. 输入的一个区别性的集合 Γ，对其中的输入，BBS 机器会停机. 我们称此为该机器的**停机集合**.（在这一例子中，Γ 实际是某些初始估计值 x 的集合，这些 x 能导向 c 的平方根的一个近似值，也就是在真值的距离为 ϵ 的范围以内.）

容易看出，程序的流程定义了一个从集合 Γ 到输出集合的输入/输出映射 ϕ.

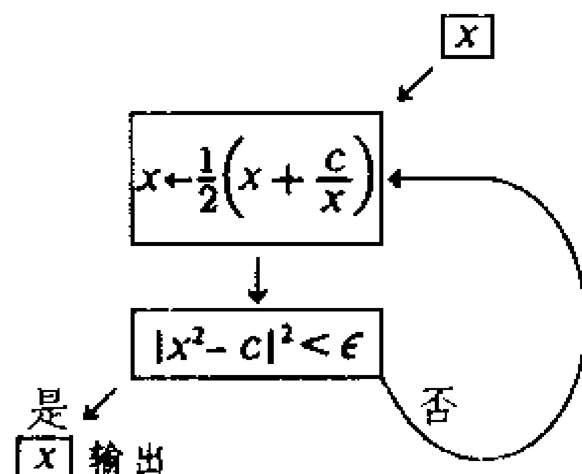


图 4.8 计算一个数的平方根的流程图

在这一 BBS 结构中，可计算映射是像 ϕ 那样的映射，也就是某个机器 M 的输入/输出映射. 证明多项式映射、有理映射和很多其他的初等映射是可计算的，是可计算映射的构成成分，这是一项很容易的练习. 也已清楚，实数集上的 BBS 结构可以推广到包括整数和复数的一类相当普遍性的数系统上的计算. 而且，布鲁姆、舒勃和斯梅尔已证明，整数集上的可计算函数同以图灵机定义的传统的可计算函数是一致的. 这样 BBS 机构成了计算的图灵概念的一个合乎逻辑的推广.

可计算性处理一个函数（或数）是能够计算还是不能计算这种非此即彼的问题——即使是在原则上. 通过引入多项式/指数这种二分，我们又将可计算函数类分成了可用有效算法计算的和不是可用有效算法计算的. 按这分法的用处，它仍然是处理一般函数的最坏情况分析的. 但是在数值分析和计算的日常情况，我们并不计算“一般函数”. 据定义，我们通常也不面对最坏的情况. 因此，从一种真正实用的观点，我们感兴趣的是对于平均的，或者有代表性的情况计算其解是如何难的问题. 这是我们在下一章中要处理的一般论题的一部分，下一章 [180] 是考虑如何最优地分配计算的或者其他的资源的问题的.

第5章 单纯形法（最优化理论）

[181]

旅行者的数学

假设来自皮奥利亚[1] 的你们的婶婶波莉想在暑假期间作一次欧洲旅行，并决定访问罗马、巴黎、伦敦、斯德哥尔摩和维也纳．如果她知道这些城市任意两个之间的飞机票价，那么为访问所有这些城市各一次并以回到她启程的地方结束，她的最便宜的走法是什么？是依次游历伦敦—巴黎—罗马—维也纳—斯德哥尔摩—伦敦更好一些呢？还是取巴黎—伦敦—斯德哥尔摩—维也纳—罗马—巴黎路线更省钱一些呢？抑或还另有更便宜的周游路线？为波莉婶婶的假期选择最好的可能路线，是当今称作旅行推销员问题（TSP）的难题的一例．

咋一看，波莉婶婶的问题很容易解．她从哪一城市开始她的旅途有5种可能的选择．在选定其中一个之后，她可以由之去向余下的4城市中的任何一个．然后有3个城市可供下一步选择，如此继续．这样一来，波莉婶婶只需要对每一种可能路线将由一市到一市的费用加起来，并挑出费用最低的路线．对这样5城市的情形，仅有 $5\times4\times3\times2\times1=120$ 条可能的周游路线．计算机考察所有这些可能性并告诉波莉婶婶花费她的旅费的最好的走法，很可能只要用几个毫微秒的时间．遗憾的是，这种涉及对所有可

① 译者注：美国伊利诺思州中部的一个城市．

能性作穷举式考察的直接方法，如果城市数多到比如说100，一般是无用的．那时为检查所有可能的路线，必须完成大约 10^{150} 次计算，用当今最快的超级计算机也需要 10^{120} 年左右的时间．

虽然不是很多旅游者或推销员想要或者需要访问100个城市，旅行推销员问题却因其有较之在旅游业中远为广阔的应用可能性而十分重要．例如，电子线路板制造商必须在他们的板子上使用激光钻钻出多达65 000个孔．寻求最好的钻孔路线的问题原来是一个TSP，因为这涉及寻找访问到每个钻孔位置恰好一次的最短的周游路线．并且，事实上，一批科学和工业研究人员，近来通过求访问3 038个城市的准确的最小距离路线而创造了一项TSP记录，其中这些“城市”真的就是在一块印刷电路板上钻出的孔．只为有趣，图5.1给出这一问题的解． [183]

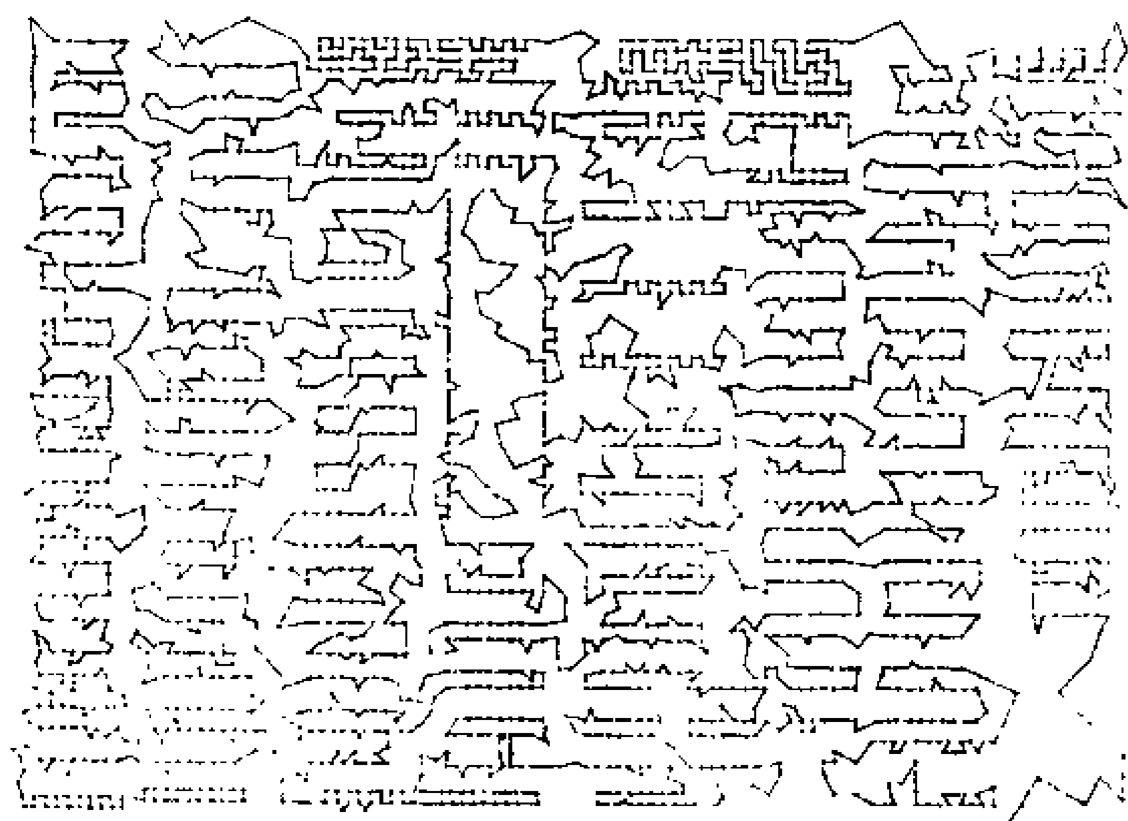


图 5.1　一个有3 038个城市的TSP的解

日本弹球盘[①] 机器制造商提供了一个甚至更为复杂的TSP变化形式. 这些弹球机[②] 式的机器有几千个钉. 球从这些钉跳走, 一个大问题是决定如何移动锤击头以便将这些钉尽可能快地钉入. 这一问题因钉站立起来比锤更高, 从而锤不能重访它已击入一个钉的任何位置, 而被弄得更为困难.

这些种类的TSP对我们的称作"最优化问题"的场合是最为完美精辟的例子. 这些问题的数学提法包含一组变量, 它们的值或许要服从某些约束. 而且我们假设已知一项规则, 据以赋予这些变量的每一组可能的值以一个数. 我们的目的是寻找这些变量的, 使这个数尽可能地大 (或尽可能地小) 的值, 同时要求变量的这些值满足给定的约束.

为了用例子说明这个一般的概念, 假设有总数为1 000美元的资金要分作两项可能的投资, 比方说股票和国库券. 进 [184] 而, 假设投资 X 美元于股票产生年利润为 $2X$ 美元, 而 Y 美元投入国库券会产生 Y^2 美元 (我从来没说这个问题是真实的!). 因为我们的兴趣在于获得尽可能大的利润, 所以要选择 X 和 Y, 服从约束 $X+Y\leqslant 1000$, 而使得量 $2X+Y^2$ 为最大. 这里问题的变量是 X 和 Y, 即分别投入股票和国库券的钱数, 而这唯一的约束只是说我们不能投放比我们所拥有的更多的钱. 最后, 这笔钱在两项投资中的任何可行的分配 X 和 Y, 通过数 $f(X, Y)=2X+Y^2$ 来量度它. 要做的是寻找一种分配 X 和 Y 使之有函数 f 的尽可能大的值, 又服从预算约束. 在这一特别简单 (并且可笑!) 的例子中, 十分清楚最好的投资方案是倾全资投入国库券, 而不分任何资金于股票. 由此获得

---

① 译注: 一种日本赌博游戏. 利用弹簧弹球滚入盘上特定小孔时会滚出许多小球以换取奖品.

② 译注: 弹球机 (pinball machine) 是一种用弹簧锤把弹子沿槽击至斜板顶部然后任其下滚落入各种规定部分而得分的游戏.

利润为每年 $(1000)^2=1$ 百万美元.

像TSP这样的最优化问题的研究，在1930年代后期，作为一个被承认和受重视的学科而开始进入数学的意识，在第二次世界大战期间及战后紧接的时间里，获得了相当的进展和关注. 在当时，很多种商务和军事问题，包括像飞机维修工作排序，分配资金到不同的投资项目，或者在装配线运行中的部件加工等的最好的方法，成为现在称作"运筹学"的研究领域的一部分. 运筹学工作者参与建立关于出现什么和何时出现的最小费用（或最大利润）的排序，或者计划. 在运筹学的早期岁月，这种计划被标示作"规划"（programs）. 这导致了一直沿用到今天的术语，据以我们将求最优安排的问题，像在TSP中求最好的周游路线，称作"规划"（programming）问题. 尽管数字计算机的发展对于求解这些类型的最优化问题所需要的方法的实际实现，是决定性的，但一个规划问题就其本身而论，同计算机程序毫无关系. 倒不如说它指的是一个在某种意义上是最优的活动计划的确定.

指明了这一小点可能的术语上的混淆，现在我们看一看最简单的，并且从实际的金钱的观点说肯定是最重要的一类最优化问题，就是在其中出现的一切东西都是线性的那一类. [185]

线性地思考

大多数的管理决策最终都转化为关于如何分配资源以使某种事情为最优的决策，例如，资金的分配要使投资的利润为最大，或者在一种产品如汽车或电视机的生产中，人力和材料的分配要使得总的费用为最小（并因而使利润为最大）. 这类问题通常可以用如此的方式表述，以使得可以用被称作线性规划（LP）的方法来解决. 但在用一般性术语描述这一方法之前，我们先看一个非常简单的例子，只是为领会其一般思想.

考虑 Chow-Down 狗饲料公司所面临的情况，他们制造两种狗饲料，Bow-Wow 牌和 Wuff-Wuff 牌．两种牌子的饲料都是羊羔肉、鱼和牛肉三种组分的混合物，区别在于其准确的配制．表 5．1 给出了生产一个包装的 Bow-Wow 和 Wuff-Wuff 所需要的各组分的量．表 5．1 也给出了公司现在库存中所拥有的每一组分的总量．

假设该公司从每一包装的 Bow-Wow 创利润$12，每一包装 Wuff-Wuff 净赚$ 8．那么 Chow-Down 公司的问题是决定每一品种各生产多少包以使总利润为最大．

组分	总可用量	一包 Bow-Wow 中的量	一包 Wuff-Wuff 中的量
羊羔肉	1400 磅	4 磅	4 磅
鱼	1800 磅	6 磅	3 磅
牛肉	1800 磅	2 磅	6 磅

表 5．1　不同品牌 Chow-Down 狗饲料每包所需的成分

为了给这一问题以数学描述，令 B 为 Bow-Wow 牌要生产的包数，而 W 表示 Wuff-Wuff 牌的产出水平．则从表 5．1 可见，要用的羊羔肉的总量是 $4B+4W$ 磅．但因为只有 1 400 磅羊羔肉可用，所以 Chow-Down 公司必须遵守约束

$$4B+4W\leqslant 1400, \qquad (1)$$

这是 Chow-Down 公司不能使用比他们手上有的更多的羊羔肉这一事实的数学表示．基于鱼和牛肉这二种组分的库存总量的类似的讨论导出约束

$$6B+3W\leqslant 1800, \qquad (2)$$

$$2B+6W\leqslant 1800, \qquad (3)$$

[186]

因为 Chow-Down 公司不能生产负数包的任一品牌饲料，所以也要求 B 和 W 都是非负的．

注意这些全部是线性约束，因为未知量 B 和 W 处处都是以

一次幂出现. 最后，因为公司利润为每包 Bow-Wow $ 12 和每包 Wuff-Wuff $ 8，所以公司总利润，记作 P，可以数学表示为

$$P = 12B + 8W. \qquad (4)$$

这样一来，问题就是求两种品牌的产出水平，即 B 和 W 的值，服从约束（1）至（3），使得 P 尽可能地大.

早期解这一问题的方法是画一个图. B 和 W 的任意一对值构成坐标轴为 B 和 W 的 2 维平面上的一个点. 又因为两个量必须是非负的，所以将注意力限制在第一象限的点. 而且，三个约束全都是线性的. 这意味着每一约束可以几何地画

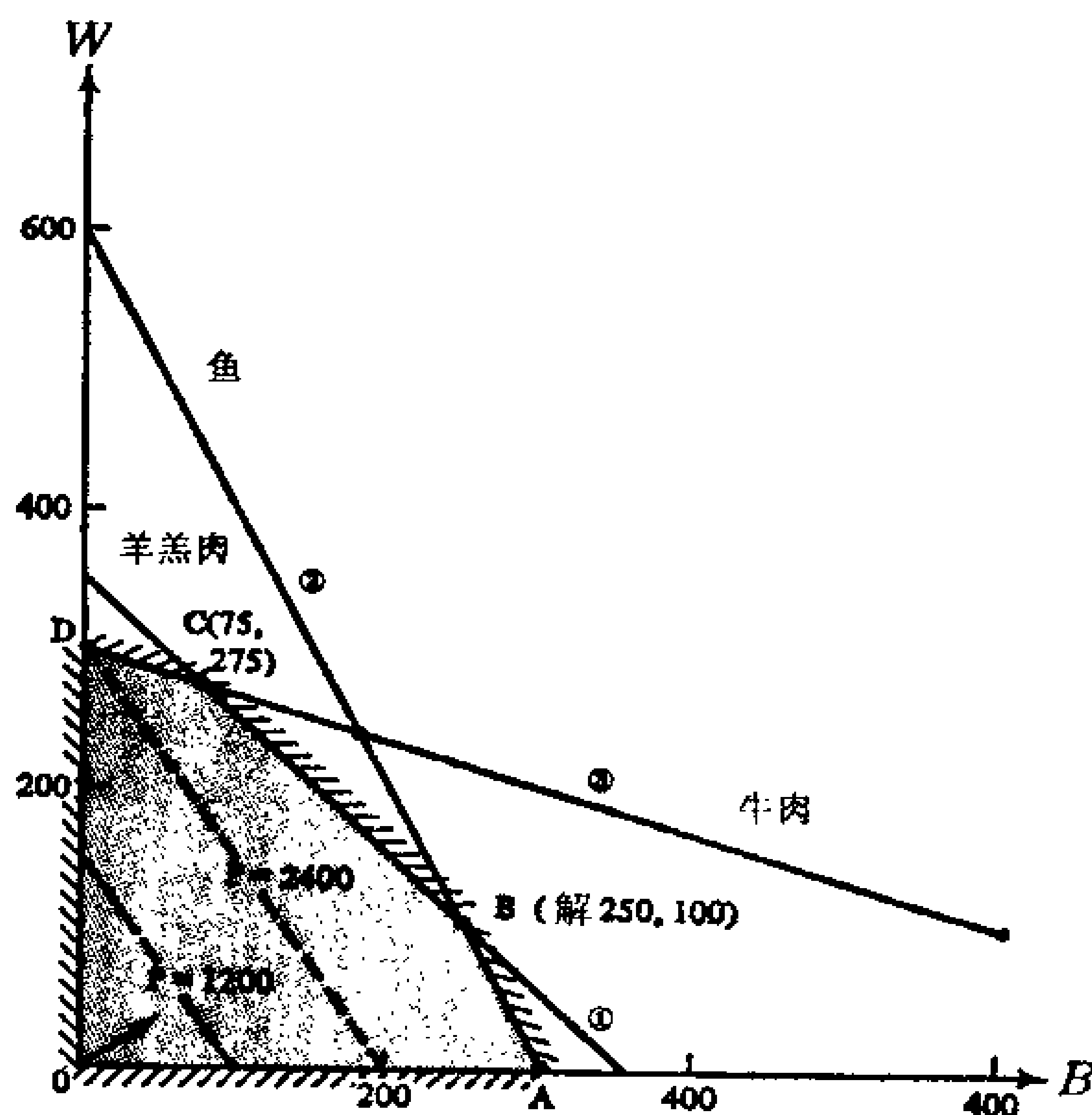


图 5.2 狗饲料混合问题的图解

作（B，W）平面上的直线．整个情况表现在图 5.2 中，其中约束(1)，(2) 和 (3) 分别表示为标号①，②和③的直线．可行集，由所有那些满足约束的（B，W）点组成，表示为阴影区域 OABCD，而可行集的边界由各条约束直线的画了阴影的区段组成．最后，注意顶点或角点，这是形成边界的线段的交叉点．

图 5.2 中的虚线表示利润的各个不同的常数值．例如，在标以“$P = 1\,200$”的虚线上的所有的点，都表示会为 Chow-Down 公司产生 1200 美元利润的两品牌的产出水平．因为公司想使其利润为最大，所以要平行移动虚线 P 尽可能地远离原点，而又服从同阴影区域的边界至少有一个交点这一条件．稍加实验会得到无论 P 线在哪里，这一离原点而去的平行移动必将停止于阴影区域边界的某个角点上．于是，最大利润必在角点——在此情况为 O，A，B，C 或 D 之一处实现．如图所示，结果是 B 点．其坐标为 $B = 250$，$W = 100$．在该点利润是 3800 美元．这样如果 Chow-Down 想从其羊羔肉、鱼和牛肉的供应中获得尽可能多的利润，他们应当生产 250 包 Bow-Wow 牌和 100 包 Wuff-Wuff 牌． [187] [188]

此例表明任何 LP 问题，其特点中最重要的是，解总在可行区域边界的一个角点上求到．而在边界点上至少有问题的两个约束面临其极限，也就是说，成为严格的等式．因此，在解点上至少有两种资源——羊羔肉、鱼或牛肉——将被用光．我们立刻回到对这一特点的考察．

于是我们看到，尽管可行集的每一个点原则上说都是最优解的候选点，但为求最优解我们实际上只需考察这些角点．这一结果在计算上的意义是巨大的，因为它使我们为求解所必须搜索的点集，从一个无穷集（阴影区域所有点的集合）减小为一有限集（所有角点的集合）．当然，这可能仍然是一个难的计算问题．毕竟国际象棋的可能阵势的数目虽然也是有限的，但要在不超过几倍的宇宙寿命这样长的时间内全面考察这些阵

势，也远远超出了任何实在的或可设想的计算机的能力．有幸的是 LP 的情况并不是这么坏．并且存在计算上很有效的和实用的搜索角点的计算过程．下面我们先考察一下这类方法，即所谓的单纯形法．它仍然是求解线性规划问题时实际上使用的大多数算法的基础．

单 纯 形 法

1947 年，G·B·丹齐克[①] 在五角大楼工作，作空军主计官的数学顾问．作为他工作的一部分，丹齐克时常被空军要求去解实际的计划问题，涉及到按一种成本——效果方式分配空军的人力、经费、飞机和其他资源的方法．因为这些问题的大多数以这种或那种方式涉及经济学，所以丹齐克认为经济学家们几年前已经发展了求解这些问题的方法，便征求经济学家 T·库普曼斯（Tjalling Koopmans）关于如何求解这些 LP 问题的意见．出乎丹齐克意料的是，库普曼斯告诉他，经济学家们也还没有任何系统地求解 LP 问题的方法．于是在 1947 年夏，丹齐克开始寻求一种方法．[189]

在丹齐克寻求解 LP 问题的方法的过程中，首先的——并且是十分重要的——一步，是我们关于狗饲料混合的问题所作过的那种观察，正是可行区域是所谓的多胞形，一种像图 5.3 所示的集合．这样一来，用曾在两个变量的狗饲料混合问题中使用过的相同的论证路线，这意味着最优点必定是该集合的角点中的一个．而且，丹齐克论证说，在各个角点上一般说判据函数有不同的值．因此，下列做法应当是可能的：从任意选取的一个角点开始，在该点判据函数有某个值，通过从这样一个角点移动到一个相邻的

---

① 译注：George Bernard Dantzig，1914．11．8～，美国数学家，运筹学家和计算机科学家．

角点，来改善判据函数值，这十分像图中所示的甲虫所作的运动，它沿着棱边爬行，寻找比如说装有最大量的食物的点，此处用巧克力蛋糕来标识．用代数拓扑学的专用术语说，这类多胞形称作“单纯形”，它引致丹齐克的算法的取名，这算法告诉甲虫它应当如何沿着棱运动，以到达它的目的地．

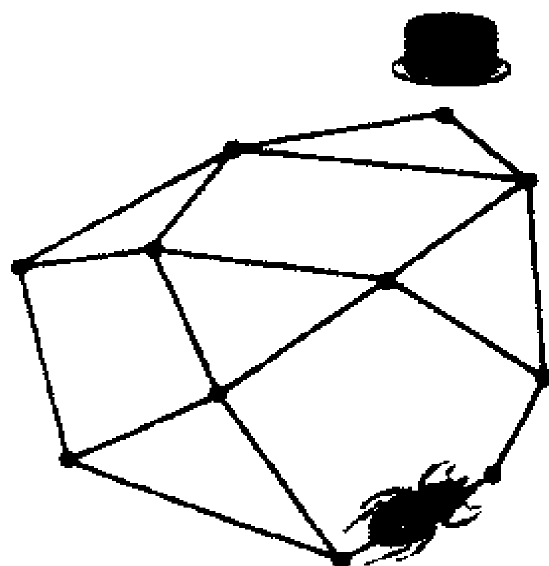


图 5.3 沿多胞形的棱爬行的甲虫

丹齐克原本以为这样一种方法或许是无可救药地低效率的，沿着改善判据函数值的棱从一个角点到一个角点地漫游，在到达判据函数有其最大值的点之前，要花很长的时间．但他错了！事实上，他发现在几乎所有的情况，寻找问题的解仅仅需要像问题中的约束个数那样多次数的运动．然而应当指出，这是一项经验的观察结果，是基于数以千计的现实生活中的问 [190] 题的实际求解得到的，并且有可能构造专门的一种 LP 问题，使用单纯形法求解的确要用非常长的时间，或者会导致方法的退化情形以使永远求不到解．但是这些种类的问题更像是数学上的极端例子，实际上极少出现，如果曾有过的话．这一令人高兴的事实导致最优化理论的基本的结果：

单纯形法 几乎每一个线性规划问题都可以按下列过程求解：

1. 找一个代表一可行解（也就是说，其坐标满足问题的所有约束的点）的顶点，并计算判据函数在该点的值.
2. 考察可行集的通过该顶点的每条边界棱，看是否能沿这样的棱运动而改善判据函数的值.
3. 若是，则沿一棱运动到顶点，使产生判据函数现行值的最大的改善.
4. 重复步骤（2）和（3），直到不再有沿其运动可改善判据函数的棱 这时现行顶点就是问题的解.

这样我们看到，单纯形法的计算实现包括两个方面：（1）找一个可行解以启动此过程，然后（2）通过沿可行集边界的棱从一顶点运动到一相邻顶点以改善可行解，一次一步，直到到达最优点.

为考察单纯形法在实践中如何工作，我们回过头来用它来解狗饲料混合问题. 回想问题包括寻找 B 和 W 的非负值，以使上面给出的判据函数（*）取最大，要服从关于羊羔肉、鱼和牛肉的可用量的约束（1）至（3）. 因为不等式难以处理，我们引进另外的非负变量 s_1，s_2 和 s_3，称作松弛变量，目的是将不等式约束变为等式. 例如，如果 B 和 W 的值使得 $4B+4W$ 小于 1400，约束（1）的松弛变量 s_1 取值 $s_1=1400-4B-4W$，这样就有 $4B+4W+s_1=1400$. 在下文中松弛变量总是按这种方式使用，以确保约束不等式转变为等式. [191]

这样我们的问题可表示作：求变量 B 和 W 的值，使

$$12B+8W$$

为最大，服从约束

$$4B+4W+s_1=1400,$$

$$6B+3W+s_2=1800,$$

$$2B+6W+s_3=1\,800.$$

像通常那样，也有要变量 B，W，s_1，s_2 和 s_3 为非负的约束.

在这时引入几个术语是有益的. B，W 和松弛变量的满足约束的一组值称作可行解. 通过置这些变量中的某一些为 0，剩下一组含比如说 m 个变量的 m 个方程，这样得到的解称作基本解，并且将这一组 m 个非 0 变量称作基. 一项数学事实是如果一个系统有可行解，那么它也有基本可行解. 正常情况下这正是我们要寻找的那类解. 现在我们来看单纯形法如何解狗饲料问题.

Chow-Down 公司必须解的问题有 5 个变量——B，W，s_1，s_2 和 s_3——以及 3 个约束方程

$$4B+4W+s_1=1\,400,$$

$$6B+3W+s_2=1\,800,$$

$$2B+6W+s_3=1\,800.$$

这样为形成一个初始的基本解，我们必须选出这些变量中的 3 个，并且置其余的为 0 值. 如果我们选出的 3 个变量满足上述的约束方程组，那么我们将得到第一个基本可行解，以这 3 个变量为基. 为了作这一初始选择，注意到每个松弛变量只出现 [192] 在一个约束方程中. 这提示我们使用松弛变量以形成初始基本解. 这意味着置 B 和 W 等于 0，剩下三个未知数 s_1，s_2 和 s_3 的一个 $m=3$ 的约束方程组. 这组方程的解通过观察容易读出为 $s_1=1\,400$，$s_2=1\,800$ 和 $s_3=1\,800$. 下一步是对基变量 s_1，s_2 和 s_3 解出约束方程组，用非基变量 B 和 W 表示出来，并写出用非基变量表示的判据函数.

完成这些运算，s_1，s_2，s_3 和 P 的值为

$$s_1=1\,400-4B-4W,$$

$$s_2=1\,800-6B-3W,$$

$$s_3=1\,800-2B-6W,$$

$$P=12B+8W.$$

在几何上，这一解对应于上述“线性地思考”一段中的图 5.2 中的点 O；遗憾的是，它对应于利润为 0 的点，因为 B 和 W 两个量都不在基中从而有 0 值.

为增大利润 P 可以增加 B 和 W 的值. 由于单纯形法的每一步只能改变一个变量，习惯上选在判据函数中有最大系数的变量将之引入新的基中. 理由是这样的选择将以最可能快的速度增大利润. 因此我们选择将 B 引入基中. 但是我们不能让 B 超过 300，因为那会使松弛变量 s_2 变为负（记住在此点 $W=0$）. 因此我们置 $B=300$，这使 $s_2=0$. 现在我们在图中的点 A，B 成为基变量，而 s_2 为非基变量.

现在重新用非基变量 s_2 和 W 表示基变量（s_1，B 和 s_3）和利润 P 的判据函数，得到

$$s_1 = 200 + \frac{2}{3}s_2 - 2W,$$

$$B = 300 - \frac{1}{6}s_2 - \frac{1}{2}W,$$

$$s_3 = 1\,200 + \frac{1}{3}s_2 - 5W,$$

[193]

$$P = 3\,600 - 2s_2 + 2W.$$

由于这组方程右端的变量 s_2 和 W 在这一阶段为 0 值，上述方程中的常数项给出基变量的值和判据函数的值. 这意味着通过引入 B 作为基变量，利润从 0 增至 3 600. 但我们仍能做得更好，因为非基变量 W 有一个正的系数. 这意味着可以通过将 W 引入新的基变量中而使利润 P 进一步增大.

跟前边一样，注意新的基变量 W 不能大过 100，因为更大的值将使松弛变量 s_1 变负. 因此我们置 $W=100$ 包 Wuff-Wuff，并在新基中用 W 取代松弛变量 s_1. 这样留下 B，W 和 s_3 作为新的基变量. 如上进行，求得基变量的新的值是

$$W = 100 - \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{3}s_2,$$

$$B = 250 + \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{3}s_2,$$

$$s_3 = 700 + \frac{5}{2}s_1 - \frac{4}{3}s_2,$$

$$P = 3\,800 - s_1 - \frac{4}{3}s_2.$$

因为 s_1 和 s_2 在 P 的表达式中都有负系数，所以它们任何一个增加其值都只能使利润变小．于是我们得到了最优解．它对应于图 5.2 中的点 B．并由于上述方程组右端的变量在此阶段全为 0 值，通过在这些方程中读一遍常数项即可找出最优解．因此，对于 Chow-Down，最优解是生产 250 包 Bow-Wow 和 100 包 Wuff-Wuff，这将产生利润$ 3 800．在最优解中松弛变量 $s_3 = 700$这一事实，其解释是第 3 个不等式约束，即关于牛肉的那个，是不起作用的．这暗示按照品牌的最优组合，有 700 磅牛肉没有使用．相反，在最优点上松弛变量 s_1 和 s_2 都是 0，告诉我们 Chow-Down 公司要做到他们的两个牌子的最优产出水平，必须使用全部库存的羊羔肉和鱼． [194]

对偶和食谱

总结线性规划在经济学中的重要性的最早的主要著作之一，是在 1958 年由后来的诺贝尔奖得主萨缪尔森[1] 和 R·绍罗夫（Robert Solow），同他们的同事 R·多夫曼（Robert Dorfman）一起出版的．在这一著作中，LP 方法是用从此被称为食谱问题的为例来说明的．其叙述如下．

设有一人每天要求一定量的两种维生素，V 和 W．这些维生素从两种不同的食物，比如说奶和蛋中得到．对两种维生素

[1] 译注：Paul Anthony Samuelson，1915．5．15－、美国经济学家．1970 年获诺贝尔经济学奖．

每天的需求，在这些食物的一单位的数量中每种维生素的含量，以及两种食物的单价（以美分计）给出在下表中：

维生素	奶中含量	蛋中含量	日需求
V	2	4	40
W	3	2	50
单价	3	$2\frac{1}{2}$	

目标是确定每天应当吃多少奶和蛋，以便以最低可能的购买这些食物的花费，而获得最低限度的维生素日需求量.

令 a 表示要买的奶的数量，b 为蛋的数量. 食谱问题可以写成的数学形式是对

$$3a+\frac{5}{2}b$$

求最小，服从条件

$$2a+4b\geqslant 40,$$
$$3a+2b\geqslant 50,$$
$$a,\ b\geqslant 0.$$

将这一问题留给读者用刚刚提供的方法去证明该问题的解是 $a^*=15$，$b^*=\frac{5}{2}$，最小费用是 $51\frac{1}{4}$美分. 问题的这一表述强 [195] 调了消费者的眼界，他们希望在获得必要的维生素的前提下，使食品总花费为最小. 然而还有另外一种同样真确的观察这一问题的方法——从食品销售商的角度.

考虑出售奶和蛋给需要维生素的人的食品杂货商. 他知道这些食品按其维生素 V 和 W 的含量而有一定的价值. 食品商的问题是确定出售价格，比如说每单位维生素 V 为 X 美分，单位维生素 W 为 Y 美分. 但商家受约束于要按如下事实来定价，即他不能将价定得高于奶和蛋的市场流行价. 换句话说，食品商对奶的定价不能高于每单位 3 美分，蛋的定价也不能高

于每单位 $2\frac{1}{2}$ 美分，因如不然在一个竞争的市场上商家将失去他的顾客．然而同时，食品商又希望使得商店的总收入为最大，这应是 $40X+50Y$，因为日需求是 40 单位维生素 V 和 50 单位维生素 W．食品商的问题从数学上可陈述为对

$$40X+50Y$$

求最大，服从条件

$$2X+3Y\leqslant 3,$$

$$4X+2Y\leqslant \frac{5}{2},$$

$$X,\ Y\geqslant 0.$$

对比消费者的问题和供应商的问题，发现如下值得注意的事实，即通过作下列的替换，可以将第一个问题转变为第二个问题：

求最小	——→	求最大
$\geqslant$	——→	$\leqslant$
食品费用	——→	价格约束

消费者和供应商的这一对问题称为对偶 LP 问题，并且上述替换表明每一个 LP 问题包含有两种完全等价的表述：所谓原问题和它的对偶问题，前者为原来提出的问题，后者为使用刚才给出的替换而形成的问题．

在数学上，在原问题和对偶问题之间的这一对偶性，跟通常的欧氏几何中在点和线之间的对偶性有完全相同的性质．在那里，我们知道欧几里得关于点之间的关系所作的每一陈述，都可以用关于线的完全等价的陈述所取代．例如，“两点确定一直线”的陈述有其对偶的陈述“两直线确定一点”，这只要将“点”和“直线”两个词交换一下即可得到．数学中充满了这样的对偶性，此处给出的消费者和供应商问题的对偶性，是这一对偶性原理在线性规划的专门情况中的表现．

[196]

此处给出的例子说明了单纯形法当它一般地应用在实践中

时的所有各个方面．想要更详细地了解如何实现方法的计算，以及要了解更为技术性的方面像对偶性的讨论的读者，应当去查阅在文献目录中为本章所开列的诸多文章和书籍．现在我们简要地看一下在以上的讨论中被曲解了的一点，即隐含地假设 LP 问题中的变量无论何时都可以取任意的非负的值．

整数规划

观察入微的读者会注意到，在狗饲料混合问题中，我们没有明显地说明狗饲料的包作为整个的单位使用这一事实．换句话说，Chow Down 公司不可能生产三分之一包或者$\frac{12}{79}$包他们的一种牌子的狗饲料；公司只能生产 0，1，2 或者某个其他的整数多包．并且正是仅靠对约束中的各个系数的偶然的一种选择，最优解碰巧得出是整数．用少量实验，胆大的读者会立刻发现，在约束中不用作很多改变，就会有所有角点全在 B 和 W 的非整数点上，因而单纯形法将产生的最优解是非整数的．有大量实际的问题具有如下特色，即只有当问题的变量取整数值时才是合理的．这样的例子包括分配资金于不同的投资项目，指派学生到讲课教室，以及工厂中装配操作的排序等．

初一看，人们会想，处理整数约束的方法是只需求解没有[197]这一整值约束的问题，然后将所得到的解舍入到它的最近的整数值．在几何上，这一简单化的方法不能工作的理由是，表示 LP 问题的解的角点，不是出现于问题中的判据函数和约束方程中的系数的连续函数．因此，这些系数中任何一个的微小的改变，可能引起解的从一个角点向另一个的“跳跃”．并且将一个非整数解作舍入，在数学上等同于这些系数中的某些个“上下左右急速移动”．下面是一个小小的例子，表明对这类整数规划问题这种作舍入办法的愚笨．

考虑问题为求

$$11x - y$$

的最大，服从约束

$$10x - y \leqslant 40,$$

$$x + y \leqslant \frac{41}{2}.$$

此处是在未知量 x 和 y 的全部非负整数值上求最大.

如果我们忽略整数要求，并使用单纯形法，则得最优解 $x = \frac{11}{2}, y = 15$，这导致判据函数的值为$\frac{91}{2}$. 但因为 x 不是整数，我们不能接受此解. x 的最近的整数是 5 和 6，于是我们可以想到试一试整数对 $x = 5$，$y = 15$ 和 $x = 6$，$y = 15$ 作为问题的可能的解. 第一对给出判据值为 40，而后一对甚至不是可行解，因为它不满足问题的约束. 照已判明的结果，此问题有一个更好的整数对，即 $x = 5$，$y = 10$，它导致判据函数值为 45.

此例说明整数规划问题需要基于它自己的事实加以论述，而不能用“将用单纯形法得到的解舍入到最近的整数”这种规则草草处理. 对于由 R·E·哥莫莱（R.E.Gomory）和其他人所发展的处理这一有生命力的重要的一类最优化问题的专门方法的说明，我们推荐读者参阅文献目录中开列的资料.

虽然我们可以贡献几倍于此书篇幅的另一本书专讲 LP 的各种扩展和推广，可是此处篇幅方面的考虑只允许在这一浩瀚海洋中作一小小的浸蘸. 这样作为线性最优化问题的讨论的结 [198] 尾，我们考虑或许是最重要的一类能用基于 LP 的思想加以处理的专门问题，即网络流.

图 和 桥

二百五十年前，现在的俄罗斯城市加里宁格勒，是当时德

国的东普鲁士区的一部分，且该城市称作柯尼斯堡．一个普通的星期天下午，柯尼斯堡居民的消遣是散步穿过市中心，该市被普雷格劳（Pregel）河分作两半．在当时有 7 座桥架于河上，其位置如图 5.4 的左半所示．人们问是否存在一条路线通过每座桥恰好一次．这最终有些像一个地区难解之谜．伟大的数学家欧拉在 1736 年听到了关于这一问题的详情，并且立刻看到了如何解决它．

欧拉对柯尼斯堡问题的求解的最主要的洞察在于认识到，在这一问题中由水所界定的地块的大小和形状，以及桥的长度等是不起任何作用的．于是，他将此问题约化为图 5.4 的右半所表示的图，在其中结点表示地块，而连接结点的边代表桥．换句话说，欧拉将地块简约为点，桥简约为线．然后，他想到一个结点可以是如下三种类型之一：(a) 路线的起点，(b) 路线的终点或 (c) 中间结点．如果是最后一种，那么路线必须既进入此结点又从之出来；因此，这样的结点必须有同样多的进入的边和离去的边．因此射入该结点的边的数目必须是偶数，也就是说，该结点有偶数阶．相反，如果一结点是路线的起点，或是终点——但并非既是起点又是终点——则必须有奇数条，正是一条边射向它．又因为越每一桥恰好一次的路线必须有一个起点和一个终点，所以欧拉得出结论说，任何这样的

[199]

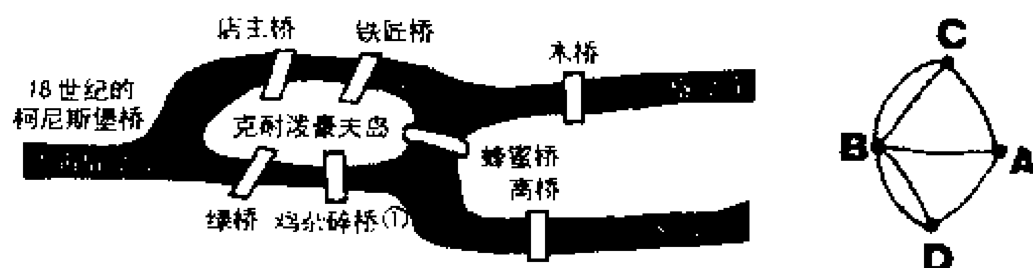


图 5.4 柯尼斯堡七桥

① 译注：原文为 "Guts" Giblets Bridge，giblets 是指（家禽的）可食用的内脏、杂碎，gut 是取出……的内脏之意．

路线将恰好有两个结点是奇数阶的．但是考察图 5.4 的右半表明在柯尼斯堡图中所有 4 个结点皆有奇数阶．于是不可能存在通过每一桥恰好一次的路线．顺便说，原来的 7 座桥中只有 3 座（情人桥、木桥和高桥）还在，并且现在有一条桥路完全穿过岛子．这样原来的问题不再成为问题——因而对数学更坏得多．

柯尼斯堡桥问题的欧拉处理，标志着现在称作图论的学科的发轫．一个抽象的图 G 是结点，或者顶点集合 V，连同边，或者弧集合 E，其中的边或弧是连接 V 中的元素的各种不同的对的．于是，如果有一条边从结点 i 到结点 j，则结点对 (i, j) 属于 E．如果每一条边有一方向（也就是有起点和终点），则称 G 为有向图．这样一来，对于有向图，可以在 E 中有 (i, j)，而 (j, i) 却不在 E 中．

图是将存在的从一地到他地的某种流——物流、人流、资金流、信息流——的物理情势作数学表示的一种很好的方式．例如，一个食品配售系统可以用图来表示，图的结点是要从他处提供供应的各个城市，有某些结点是食品源（例如货栈），其他的是目的城市．这样的图的边则代表在各对城市之间存在的公路／铁路／航线等联系．源结点、汇结点、中间结点以及其间的联系的这样一种组合通常称作网络．

关于用这样的抽象图作数学表示的网络，能够提出的最为重要的问题之一是某种商品，像信息、物资、资金和（或）人力，如何能最优地从网络的一部分流向另一部分．假设我们选定图中一个特定的结点，称作商品的源，商品通过网络流向某个另外的特定结点，称之为汇．现在我们关心的问题是：使商品能够从源移动至汇的最快的稳态流是什么？ [200]

所以网络就流动起来了

为求解网络流问题，我们所需要的决定性的概念是截集的

思想．这只是一个分划，将图的结点分作两组 P 和 $\bar{P}$，没有共同元素，并且使源结点在一组中而汇结点在另一组中．为说明这一思想，图 5.5 中的简单的 5 结点图示明一截集，其中 $P=\{s, p, q\}$，而 $\bar{P}=\{r, t\}$．

为了确定能通过网络运动的最大的稳态流，我们需要谈及一个截集的容量．假设有一截集 $(P, \bar{P})$．我们定义此截集的容量 $c(P, \bar{P})$ 为沿所有的一结点在 P 中另一结点在 $\bar{P}$ 中的边的全部容量的总和．举例说，上述图 5.5 中所示的截集的容量是

$$c(P, \bar{P})=c(s, r)+c(q, r)+c(p, t)=3+4+8=15.$$

按照定义，最小截集是有最小容量的截集．仍然用图 5.5 的例，最小截集由集对 $P=\{s, q, r\}$，$\bar{P}=\{p, t\}$组成，它的容量为 13．现在可以对网络流问题叙述原理性的结果了．

令 V^* 是在结点 s 和 t 之间的最大稳态流的值，$c(P^*, \bar{P}^*)$ 是分开 s 和 t 的最小截集的容量．我们有著名的：

[201] **最小截—最大流定理** $V^*=c(P^*, \bar{P}^*)$．

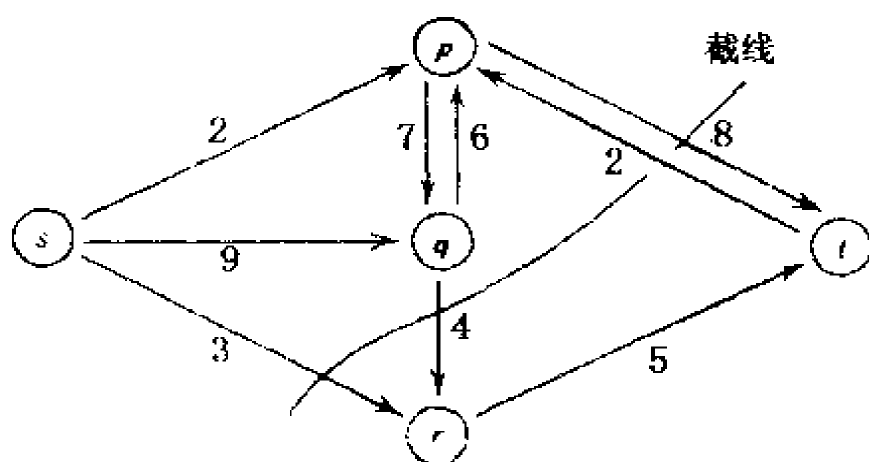


图 5.5 图的截集

这一定理是 L·福特（Lester Ford）和 D·R·富克尔森

(D.R.Fulkerson)在 1950 年代中叶证明的. 它宣布求通过网络的最大流等价于求最小容量的截集. 读者可以推想, 并且也确实是这样, 量 V^*, P^* 和 $\overline{P}^*$ 可用标准的线性规划方法求出来. 通过快速浏览文献目录中所开列的资料可以证实情况的确是这样. 现在, 我们用一个简单的高速公路车流的例子, 将截集和流这些概念使用于适当的地方.

高速公路车流

考虑图 5.6 所示的网络, 我们可以将之看作高速公路网络中的道路. 假设有某项跑步运动在进行, 因此要作从结点 s 到结点 t 的绕行. 流动容量使用比如说每小时多少个一百辆车来度量, 绕行网络中道路的每一段的流动容量在图中用没有圈起来的数字给出. 我们的任务是确定如何形成绕行路线以使通过网络的车流为最大. 最小截最大流定理昭示我们如何去做这件事.

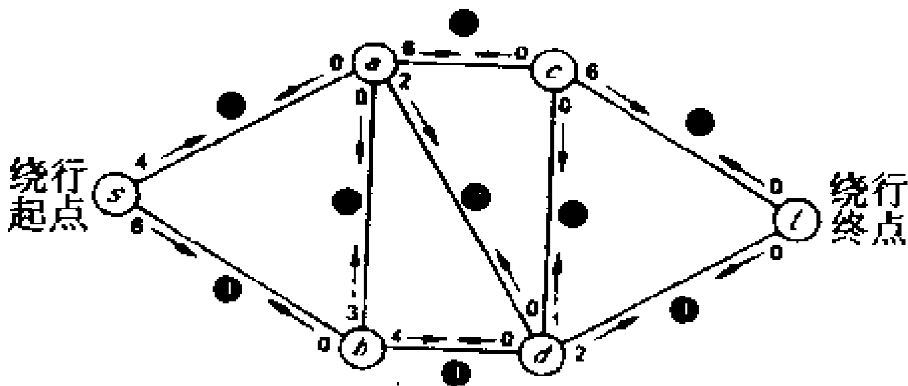


图 5.6 高速公路绕行网络

我们必须考察分开绕行起点（结点 s）和绕行终点（结点 t）的所有可能的截集（P, $\overline{P}$）. 这些截集中的某一些以及它们的容量表示于表 5.2 中. 从此表上我们看到, 最小的截集有容量 8. 这意味着 $V^* = 8$, 及 $P^* = \{s, a, b, c, d\}$ 和 $\overline{P}^* =$

$\{t\}$. 利用这一信息，我们可以从汇结点 t 开始，往回寻找沿着网络的每一条边的最优的流量，这在图 5.6 中用黑圈中的数表示出来. 当然，对于更大的网络，这种"亲身试验的"方法对于解的计算是太笨重了，我们需要使用基于线性规划算法的更为系统性的方法. 读者在文献目录中为本章开列的资料中可以找到关于如何做此事的更详细的讲述.

[202]

P	$\overline{P}$	$c(P,\overline{P})$
$\{s, a, b, d\}$	$\{c, t\}$	9
$\{s, a, b\}$	$\{c, d, t\}$	12
$\{s\}$	$\{a, b, c, d, t\}$	10
$\{s, a, b, c, d\}$	$\{t\}$	8
$\{s, a\}$	$\{b, c, d, t\}$	14

表 5.2 截集和容量

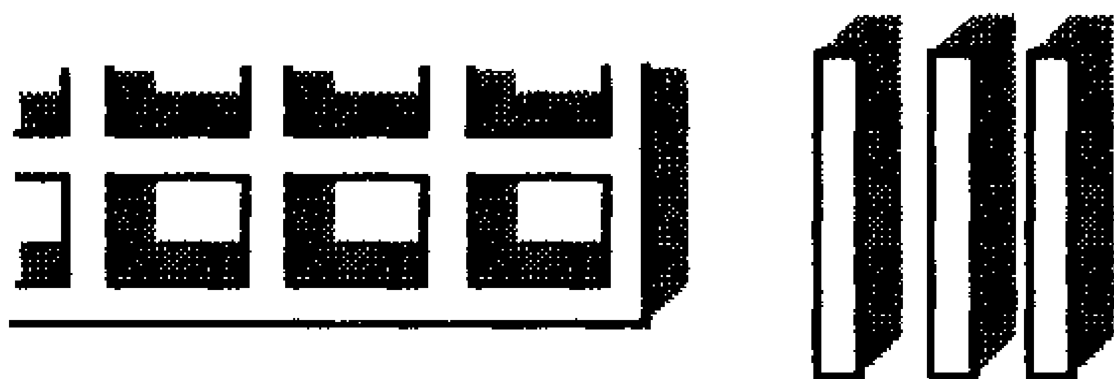
到这时我们的注意力一直集中于线性的问题和线性的方法，主要是线性规划及其扩展. 然而，跟这样的问题同样重要的是，我们生活在一个非线性的世界上这一事实. 比如说，在狗饲料生产中的规模经济，意味着费用不是按照跟所生产的包数成比例的方式增加的. 类似地，你通过一个传输网络所能输送的电量，当你将线的容量加倍时并不是加倍，而却是由于各种电阻和加热等因素，上升得慢得多. 这都是反映物理学和经济学的各种定律的非线性效应. 如此已经到了该换档的时候，改变态度与方法，捕捉这世界所真正是的那种方式，而不是我们或许喜欢它是的样子.

民众的福利

本世纪早期①，现代运动的建筑学家们将他们的工作的根

① 译注：指 20 世纪.

基置于科学和艺术的结合．以创造被设计成最简单、最便宜，和最直接地回答住房短缺问题的建筑物．现代运动的先入为主的偏见之一是大众的福利，并且在 1931 年，W·格罗皮厄斯①．



（a）城市–街区设计　　（b）平行街区设计

图 5.7

该运动的领导者之一，在一次演说中说到了如何最好地设计居住街区的问题．格罗皮厄斯争辩说，一种合乎卫生的生活的基本的东西是光，空气和空间，比适当的食物和取暖更重要．他继续摒除当时流行的对大众住房的城市–街区设计，主张代之以简单的平行街区造房．两种相对比的风格展示于图 5.7 中． 203

作为格罗皮厄斯的战斗号令的一部分，他声言 10 至 12 层的多层建筑，比 3 层到 5 层的较矮的建筑更好，因为这可以用较低的费用为较高密度的人口提供住房，而仍然保持"光、空气和足够活动或工作的空间"．特别是，格罗皮厄斯声称为每个居住者提供的开放空间的量随街区高度的增加而增加．为支持这一论辩，他发表了管理平行建房街区的三条规则．每一条规则陈述街区内的楼的层数如何随街区内的人口、街区所占据的地块，或太阳光射入每一街区的底层楼地板的角度等因素的

① 译注：Walter Gropius，1883．5．18～1969．7．5，美籍德国建筑师和教育家．

一个而变化．用格罗皮厄斯的规则，检验他的较高的街区比之较低的街区，就给每个居住者以更多的“足够活动或工作的空间”而言为更好的说法，导致一个非线性规划问题．下面是格罗皮厄斯的三条规则：

a．已知一定的地块和太阳光入射角度，供以房屋的人数随楼的层数而增加．

b．已知一定的太阳光入射角度和居住的人数，要求的地块的大小随层数的增加而减小．

c．已知地块和居住的人数，阳光入射角度随楼的层数的增加而减小．

格罗皮厄斯相信，这些规则蕴涵建筑物的最优高度应当在10至12层之间．在1930年代后期，几个城市住房计划在这一基础上制订了出来，并且在二战之后的重建中，遍及欧洲的[204]许多政府设计了结合以格罗皮厄斯规则的大众住房．但他是正确的吗？我们转向最优化理论并看一看这对不对．

在格罗皮厄斯的规则中有三个独立变量：

P：给以住房的人数．

A：地块面积．

I：阳光入射角的正切．

这些变量影响因变量 x，每一住房街区的楼层数．另外，有下列参数和常数：

a：每个街区的宽度．

b：每个居住者的地板面积．

l：每个街区的长度．

s：街区间的距离．

3：每层楼的高度（为3米）．

所有这些变量和参数显示在图5.8中．

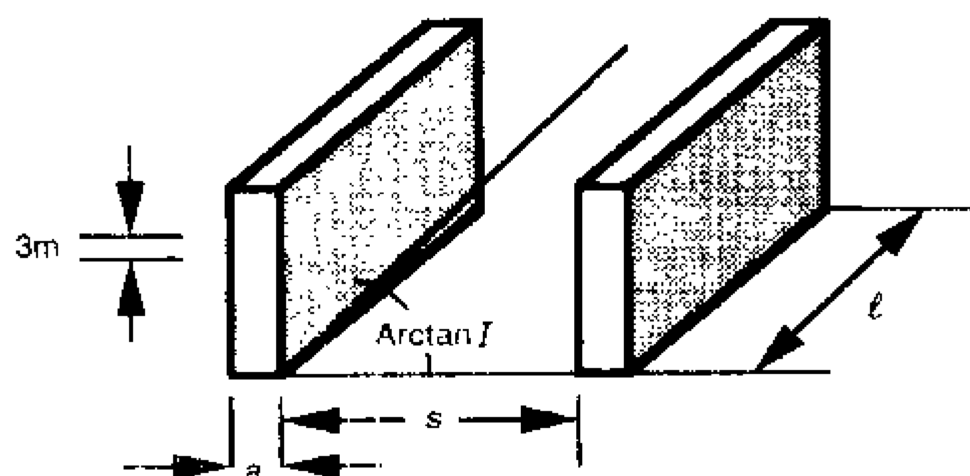


图 5.8 格罗皮厄斯住房模型中用的变量

为了看一看格罗皮厄斯就其 10 至 12 层的建筑给出最优的空间的信念是否正确，我们使用地块面积比（SAR），它是人均面积，或 A/P. 很明显它同人口密度成反比. 使用事实 [205]

$$P = alx/b,$$
$$A = l(a+s),$$
$$I = 3x/s,$$

我们发现

$$\frac{A}{P} = \frac{b(aI+3x)}{alx}.$$

格罗皮厄斯的说法是对于不变的人口密度（或 SAR），人均开放空间随楼的层数而增加，并且在近似 10 到 12 层时达到其最大值.

开放空间的量用每个街区的长度乘以街区间的距离，或 $s \times l$ 给出. 因此，为得到人均开放空间量，或者"开放空间比(OSR)"，我们所必须做的全部事情是将这个量被 P 除，即被供以住房的人数除，产生 $\mathrm{OSR} = sl/P$. 但我们可以将 P 的表达式（刚才给出的 $P = alx/b$）代入到公式中，得到

$$\mathrm{OSR} = \frac{bsl}{alx} = \frac{bs}{ax}.$$

因为 SAR 定义作 A/P，这导致关系式

$$\mathrm{SAR}-\frac{b}{x}=\frac{A}{P}-\frac{b}{x}=\frac{1}{P}(A-\frac{bP}{x})$$
$$=\frac{1}{P}(al+sl-\frac{balx}{bx})=\frac{1}{P}sl=\mathrm{OSR}.$$

保持人口密度（亦即 SAR）不变，我们看到 OSR 的确将随层数 x 的增加而非线性地增加．进而，最大的 OSR 等于人口密度并且出现在层数 x 为无穷时．这样格罗皮厄斯就他的第一个断言是正确的，即街区越高 OSR 越大．但这不是全部的情况．我们仍然必须考察他的 10 至 12 层是建筑物的最优高度的说法．

为做这件事，我们置某些真实的数于这些公式中．对于 SAR 的值，考虑当前的人口密度．这看来是在从香港的一定是最坏的住宅区的每人大约 54 ft^2，到松散城市如悉尼或洛杉矶的每人 5400 ft^2 左右这一范围内．图 5.9 表现了对低 SAR 和高 SAR 两种情形所获得的 OSR．该图所告诉我们的是，在非常高的人口密度（低 SAR）及低 b 值（亦即非常狭窄的住处）的情况，OSR 在高至大约六层就非常接近于它的最大值．相反，对于非常高的居住者人均地板面积 b 值（也就是宽阔的住宅），则甚至在 20 层时 OSR 仍不能接近最大值．但是若目标是一低密度城市，有高 OSR 值，该图显示，对于狭窄的和宽阔的住宅两种情况，在 6 到 8 层左右 OSR 已接近于最大值．这样一来，格罗皮厄斯的结论看来当用于高密度城市且为宽阔住宅的情形时，是相当正确的．但是在所有其他情况，看来是以格罗皮厄斯所建议的高度的大约一半作为建街区住房的目标会好得多．

格罗皮厄斯建房问题是无约束非线性最优化问题的一个例子，因为开放空间比 OSR 和楼层数 x 之间的关系不是线性的，

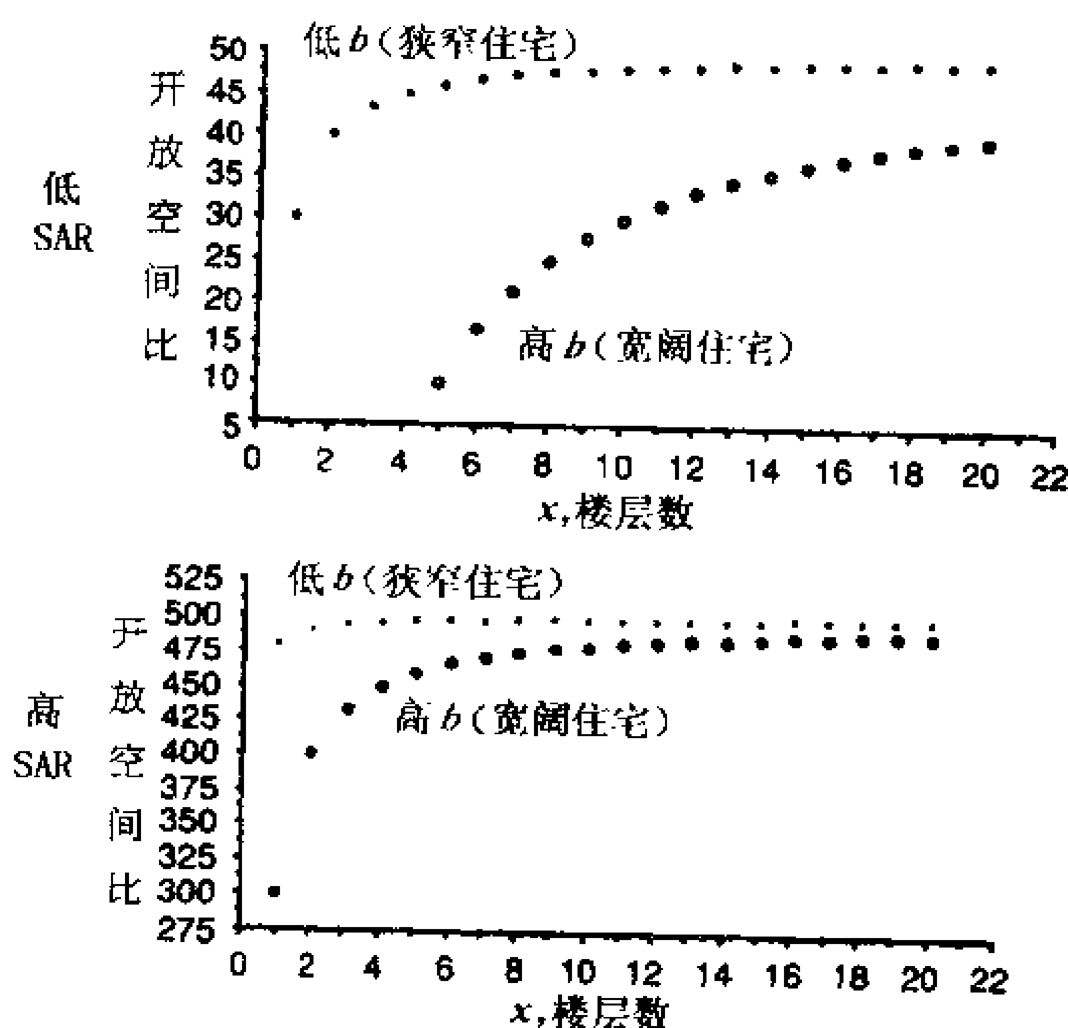


图 5.9 对应SAR和b的高低值的住房街区的OSR

而宁可说是反比例的. 大多数的最优化问题涉及某种有限供应的资源——能量、资金、物资——的配置；因此，存在为任何的解都必须满足的资源约束. 这样对随后的几页篇幅我们的任务是概述一些思想，求解有非线性的判据函数和（或）非线性约束的问题的方法以这些思想为基础.

登　　山

考虑徒步旅行者司徒尔特（下简称“司徒”）所面临的情况，他正在爬本地的一座山峰. 司徒有一幅地图和一个指南

针. 但当他踏上登山之路时，大雾突降，除了紧贴眼前的什么也看不见. 这样他应当如何前进呢? 在他想尽可能快地到达山顶这一假设下，对司徒来说一个好的做法是开始步行直趋山顶. 这就是说沿着最陡的上升方向前进. 参阅他的地图，司徒知道这一方向是在穿过他当前位置的等高线的垂直方向. 沿此最速上升方向司徒的高度增加的速度称为梯度. 显然如果没有局部区域的副高峰，通过总是沿梯度的方向移动他最终将到达

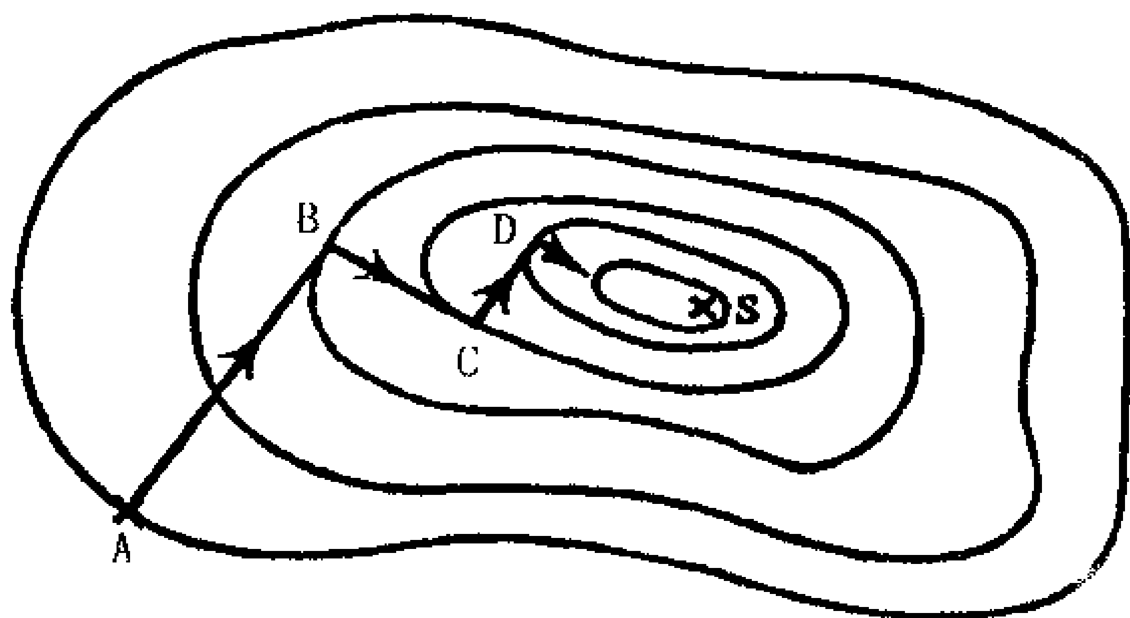


图 5.10 沿梯度方向登山

山顶. 在这种情况下司徒所追随的一般路线是如画在图 5.10 中的 A-B-C-D-S.

[208]

求解非线性最优化问题，我们可以仿效司徒在攀登山峰时所使用的方法. 想象判据函数 f 的值是司徒的“高度”，用问题的变量的值表示他的“位置”. 我们计算判据函数在他当前的位置. 点 x`、的梯度，它告诉司徒从那一点使 f 增加最快的方向. 这样如果没有约束，最速上升法，或者梯度法的一般算法如下:

1. 从任意一点 x_0 开始;

2. 计算 f 在 x_0 点的梯度；

3. 沿梯度的方向取大小为 δ 的步移动到新点 x_1，其中 δ 是一小正常数；

4. 重复步骤（2）和（3）直到到达一点 x^*，在该点 f 的梯度为 0.

上述过程产生的迹线十分像图 5.10 中司徒的攀登路线. 然而，伴随该方法的一个严重的困难是它纯粹是一个在下述意义上的局部方法，即总是在离开始点最近的一个峰点终止. 于是，除非判据函数 f 有某些专门性质保证它只有一个局部最大，我们永远不能保证梯度法的终止点是真的全局最大. 因此，追随梯度的登山者或许会陷在附近的山头或山脊的顶端，而不能到达顶峰.

处理这一困难的一种显然的办法是使用下述方法，随机地选择几个点作为开始点，然后拣从这些点开始用最速上升法所停在的点中产生最高值的一个作为解. 但使用这一方法我们也会遇到麻烦，因为在一个有几百个甚至几千个变量的问题中，为获得可能路线的一个有代表性的样本，这一方法可能要求非常大数目的开始点. 这本身又会导致不可接受的计算时间量，来追随梯度过程从所有这些不同的开始点到终止点. 而且，判据函数的结构可能会在下述意义下与我们作难，即它可能有条“山脊”，沿此山脊最速上升法陷住不动. 在这种情况下，我们需要专门的方法使过程“松开”，重新回到前进轨道上来. 读者在文献目录中可以找到这些材料的说明. [209]

剩下一个不令人愉快的事实是，没有非常好的方法寻求一般的非线性最优化问题的解. 近乎最好的业已发明的一般方法是这样的，它依赖于将原问题嵌入到一族问题中，然后发展连接族中一成员同其他成员的关系. 如果这能熟练地做到，且使一个族员是容易求解的，则这些关系就可以用于从容易问题的解前进到原问题的解. 这是潜伏于动态规划这一在所有最优化方法中是最为

灵活和最强有力的方法背后的最为重要的思想. 动态规划在统计学家 A·瓦尔德（Abraham Wald）的工作中有它自己的起源，这工作是研究为确定必须抽样多少件，以便满足给定的质量控制水平，而需用的决策方法的. 但是直到 1950 年代早期，R·贝尔曼（Richard Bellman）使用动态规划称呼产生于最优控制理论、对策论、生产和排序过程以及远为更多的领域中令人炫目的大量问题，才表明了这一根本思想的伟大的一般性. 我们通过考察某些问题看看该方法是如何工作的.

网络中的路线

流问题涉及商品通过网络的通道. 但我们所关心的常常是人的或者信息的，而不是商品的通道. 大概最常出现的这类情况是，我们想要从网络的一部分运动到另一部分，而花最小的费用——时间、资金、能量，或者某种其他资源. 这导致被称之为**路线选定问题**的一种要考虑的事. 下面是一个简单的例子.

四城市空运问题

考虑服务于 4 城市的航空公司，它的从城市 i 到城市 j 的飞行时间（以小时计），是下列矩阵的第 i 行第 j 列的元：

$$T=\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

[210]

因为会有由于地勤服务问题和/或任意一地的天气所造成的延误，从一市到另一市的最短转移时间可能不一定是直飞，而可能包括通过中间城市的间接运行. 这样我们假设该航空公司想

要在已知上述的任意一对城市间转移时间的情况下，计算从任一城市到达城市 4 的最短时间. 我们首先概述解所有这样的问题的动态规划方法. 然后再回来对照 4 城市问题使用这一方法.

假设有一 N 个城市的网络. 为符号的简易起见，我们以 1，2，…，N 标记城市，并设 t_{ij} 为从城市 i 到城市 j 的费用. 我们想找出比如说从城市 1 到城市 N 的最小费用路线. 使用动态规划，可以容易地以下列方式解此问题.

定义量

$I_k^{(r)}$ = 从城市 k 到城市 N 的至多有 r 次中停的最小费用路线费用，$r = 0，1，…，N-2$.

显然，如果在从城市 k 到城市 N 的路线上没有中停，则最小费用就是从城市 k 直接到城市 N 的费用. 由函数 $I_k^{(r)}$ 的定义，这意味着 $I_k^{(0)} = t_{kN}$.

现在假设我们从城市 k 去到一个中间城市 j. 由定义，这一转移的费用是 t_{kj}，并且我们已经"花掉了"在比如说包括最多 r 个这种停顿的最小费用旅行中的一次中停. 现在我们面对的是最多有 $r-1$ 次中停的从城市 j 到城市 N 的最小费用路线问题. 但由定义，这一最小费用恰是 $I_j^{(r-1)}$. 将这些考察结果放到一起，导出不等式

$$I_k^{(r)} \leqslant t_{kj} + I_j^{(r-1)},$$

一个对任意被选作我们从城市 k 出发的旅行的第一停站的城市 j 所必须成立的关系式. 如果我们现在这样选择城市 j，以使得这不等式的右端为最小，遂导向这一族问题的基本方程

$$I_k^{(r)} = \min_{j \neq k} \left[t_{kj} + I_j^{(r-1)} \right]. \qquad (*)$$ [211]

从没有中停（$r=0$）的旅行开始，我们有函数 $I_k^{(0)} = t_{kN}$，这是由观察得到的. 使用这一函数，下一次置 $r=1$ 并且从方程（*）计算 $I_k^{(1)}$. 这一函数则使我们能计算函数 $I_k^{(2)}$，如此继续.

因为任何旅行的最大中停站数是 $N-2$，所以这一过程在一个不大于 $N-2$ 的 r 值上收敛．此时我们不仅有最优值函数，它告诉我们从城市 k 到城市 N 的旅行的最小费用，而且有最优策略函数，记为 j^*（k），告诉我们当发现自己在城市 k 时，下一步应该到哪个城市．并且这对于所有城市 $k=1$，2，…，N 成立．现在我们用这些一般思想来解空运排序的例子．

首先作容易的计算，寻找最优值函数 $I_k^{(0)}$ 和最优策略函数 j^*（k）．当然 $I_k^{(0)}=t_{k4}$，而最优策略在你被允许不中停时就恰是直接从你所在的城市去城市 4．这些考虑立刻产生表 5．3中所示的结果．

其次，对 $k=1$，2，3 和 4 计算 $I_k^{(1)}$ 及与之相结合的最优策略函数．于是，当 $k=1$，我们有

$$
\begin{aligned}
I_1^{(1)} &= \min_{j\neq 1}\{t_{1j}+I_j^{(0)}\}\\
&= \min\{t_{12}+I_2^{(0)},t_{13}+I_3^{(0)},t_{14}+I_4^{(0)}\}\\
&= \min\{1+2,2+1,3+0\}\\
&= 3.
\end{aligned}
$$

这样一来，$I_1^{(1)}=3$．因为对 $j=2$，3，4① 的任一选择都得到该值，所以有 j^*（1）$=2$，3 或 4②．继续之，得到表 5.4.

$r=0$

城市 k	$I_k^{(0)}$	j^*（k）
1	3	4
2	2	4
3	1	4
4	0	4

[212]

表 5.3 最优值和策略函数

① 译注：原书此处答数有误，译者作了改动．

② 译注：原书此处答数有误，译者作了改动．

$r = 1$

城市 k	$I_k^{(1)}$	$j^*(k)$
1	3	2，3 或 4
2	2	3 或 4
3	1	4
4	0	4

表 5.4　最优值和策略函数

比较表 5.3 和 5.4，我们看到 $I_k^{(0)} = I_k^{(1)}$. 因此，过程已收敛，它意味着同 $r = 0$（也就是没有中停）相结合的最优费用和策略，对于这一特定的简单城市网络是最优的. 换句话说，对这一网络，从任意城市到城市 4 的最小费用路线，是我们所称的"垄断解"：沿此路线直接去城市 4 而不经过任何其他城市. 当然，在包含几十个，或甚至数以百计的城市的较为复杂的网络中，我们可以预期从一城市到另一城市的最小费用要涉及一批中停. 事实上，这一点的一个好例子是现今航空票价的形成方式. 因为最便宜的机票通常包括在一个航运"中心"转机，而不是直接去到你的目的地. 现在我们使用同一个一般的嵌入思想，处理在本章前段讨论过的资源分配问题的一个稍微更实际一些的变形.

让你的投资获利最大

假设你是一个投资者，支配一定数量的资金. 你可以作 N 种不同的投资，从高风险、高产出的投机，像莫斯科的房地产，到中等风险、中等产出的蓝筹股票，直到无风险、低产出的政府债券. 假设在你支配下有总量为 X 美元的投资资本，并假设已知这 N 种可能投资的每一种的预期利润率. 那么你的问题是在这 N 种可能的投资中，如何分配你的资本，使得年利润为最大. 下面是这类问题的一个简单例子，它再次表示动态规划的运作. [213]

设有 $N=3$ 种不同的投资：股票、债券和商品．进而，设投资股票 y 美元产生年利润 $g_1(y)$ 美元．类似地，投资于债券 y 美元产生年利润 $g_2(y)$，而在商品上同样数量的投资导致每年 $g_3(y)$ 美元的利润．如果我们分配 x_S 美元于股票，x_B 美元于债券，x_C 美元于商品投资，则问题成为使总利润 $g_1(x_S)+g_2(x_B)+g_3(x_C)$ 为最大，服从的约束是，我们不能投资多于我们所有．数学上这表现为不等式 $x_S+x_B+x_C \leqslant X$．下面是如何用动态规划解此问题．

首先，我们注意如果股票是仅有的可作的投资（$N=1$ 的情形），则问题是容易的．我们只要使 $g_1(x_S)$ 在满足 $0 \leqslant x_S \leqslant X$ 的所有投资水平 x_S 上为最大．其次我们看到该投资问题的解依赖于可作投资的数目 N 和总资本 X 二者．这样我们来定义函数

$I_3(X)$ = 在有 3 种可能的投资和 X 美元资本可用时的最大可能利润．

现在想象我们分配 x_C 于投资 $N=3$，即商品．作为这一分配的结果，出现两件事：(a) 可用资本减至 $X-x_C$，(b) 这些资本能分配到的投资机会的数目从 $N=3$ 减至 $N=2$．而且，无论向商品（投资机会 3）分配怎样的 x_C，剩下的资本必须被用于使在两种剩下的投资形式，股票和债券上的总利润为最大．这是贝尔曼所命名的"最优性原理"的一个具体的例子．粗略地讲，它说"最优策略的任何部分必须是最优的"，一个几乎是自明的真理，——但却是一项能用以产生巨大的实际利益的原理．

我们可以援引最优性原理来表示上述论述，用符号语言成为 $I_3(X) \geqslant g_3(x_C)+I_2(X-x_C)$．这从函数 $I_3(X)$ 作为可用资本总量为 X 的三投资过程的最大可能利润的定义可立刻推出．这一不等式对给商品的任意分配额 x_C 都必须成

立．这样我们显然要去选择 x_C 以使上述不等式的右端取最 [214] 大．这导致下列的联系三投资机会的分配过程同有两项投资可作的分配过程的方程

$$I_3(X) = \max_{0\le x_C\le X}[g_3(x_C) + I_2(X - x_C)],\quad N > 1.$$

(✠)

像上面注明的，容易计算 $I_1(X)$ 为

$$I_1(X) = \max_{0\le x_C\le X} g_1(x_C).\qquad (✠◆✠)$$

方程（✠）和（✠◆✠）可以用于按下列方式求解原来的投资问题．首先，用方程（✠◆✠）确定函数 $I_1(X)$．这涉及对资本 X 的每一可能值求解一个最优化问题．使用函数 $I_1(X)$，我们立刻用方程（✠）确定函数 $I_2(X)$ 知道了函数 $I_2(X)$，就立刻可以确定函数 $I_3(X)$．这一过程所实现的是取包含特定数量的资本和固定的投资机会数目的原问题，将之嵌入到一个问题族之中，族中问题其可用资本和可作投资数目二者都可变化．方程（✠）和（✠◆✠）提供了一种方案，用它我们可以解出这一族问题，解出之后则可以准确摘出感兴趣的那特定的一个的解．

上述分配过程和路线选定问题的例子，仅是开始提出可以用动态规划去处理的最优化问题的种类．最优控制过程，像以最小能量将卫星送入特定轨道，有随机涨落的诸如有风险支付的投资的问题，涉及像对策论（见第1章）的最大最小那样的非通常判据的问题等，都在此理论的范围之内．这样为什么我们不用动态规划作为各类最优化问题的通用的万灵药呢？答案要由贝尔曼所命名的"维数灾"来给出．这一名称指的是，用动态规划解一个问题所需要的计算机资源，随问题规模的增大而呈指数增长．文献目录中开列的资料给出对我们达到最优化超脱状态的这一障碍的一个充分的解释． [215]

文献目录

说明：下面列出的参考文献不是我在写本书时查阅过的每个资料的详尽无遗的记述，就像在研究专著或学术著作中应有的恰当和准确无误的那样，而只是在很大程度上打算作为文献的线索．因此，本文献目录是由为获得本书中考虑的主题的更多细节以及为研究由于篇幅限制或由于所要求的专业基础的水平超出了本书规定的读者范围而未在本书中考虑的许多主题的读者想要查询的论文、图书和文章的多少有点折中的收集组成的．下面列出的材料多多少少是按主题在正文中出现的顺序排列的．

第1章　对　策　论

Williams, J. *The Compleat Strategyst*. New York: McGraw-Hill, 1954.（中译本：［美］J·D·威廉斯著，全能战略家——对策论入门，王学沂译，福建人民出版社，1984.）差不多任何能数数，作加、减法的人都易懂的纯粹解释性的阐述，该书用许多解释性和有趣的例子给出了对策论的富有启发而有趣的阐述．

Thomas, L. C. *Games, Theory and Applications*. Chichester, England: Ellis Horwood, 1986. 是一本关于对策论的一流的大学生-研究生教材，其中有包括本书采用的战斗机和轰炸机对策在内的许多例子．有应用线性规划来计算一般

两人零和对策的最优混合策略的极好的讨论．还包括 n 人合作对策的很好的陈述．

[217]

Von Neumann, J. and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1944.（中译本：J·冯·诺伊曼，O·莫根斯顿著，竞赛与经济行为，王建华，顾伟琳译，科学出版社，北京，1963.）这是一本经典著作，由此整个对策论的领域发展到了几乎完全成熟的阶段．

Colman, A. *Game Theory and Experimental Games*. Oxford: Pergamon Press, 1982. 本书包含大量的，特别是在社会科学和行为科学中起积极作用的对策论的例子．

Jones, A. *Game Theory*. Chichester, England: Ellis Horwood, 1980. 这是一本著名的着重在数学方面介绍对策论的书，书中包含本书中讨论的康科德军火库对策．

Von Neumann, J. "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele." *Math. Annalen*, 100 (1928), 295 - 320. 极小极大定理的冯·诺伊曼的原始证明．

Brams, S. *Game Theory and Politics*. New York: Free Press, 1975. 本书讨论了大量的充分渗透对策理论思想的涉及军事和国际关系局势的例子，包括本书中讲的古巴导弹危机对策．

Game Theory and Related Approaches to Social Behavior, M. Shubik, ed., New York: Wiley, 1964. 许多对策论早期研究工作，特别是与社会科学和经济学中冲突局势有关工作的出色综述．

Shubik, M. *Game Theory in the Social Sciences*. Cambridge, MA: MIT Press, 1982. 作为一般性地应用于政治学、经济学和社会领域的对策论各分支的一流的综述．

Rapoport, A. and A. Chammah. *Prisoner's Dilemma: A Study in*

Conflict and Cooperation. Ann Arbor, MI: University of Michigan Press, 1965. 对以各种方式表现的囚徒两难对策的充分而又完全的讨论.

Maynard Smith, J. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge: Cambridge University Press, 1982. 关于进化稳定策略及其在种群生态学中应用的权威性研究工作.

Axelrod, R. *The Evolution of Cooperation*. New York: Basic Books, 1984. 关于迭代囚徒两难对策对局策略的极有吸引力的计算机实验的第一手陈述.

第2章 拓 扑 学

Shasbkin, Yu. *Fixed Points*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1991. [218] 这是一本从俄文翻译过来的书, 是专为优秀中学生写的介绍性的书. 书中有许多几何的洞察以及很多挑战性和发人深省的习题.

Stewart, I. *Concepts of Modern Mathematics*. London: Penguin, 1975 (Paperback edition: New York: Dover, 1995). 这个软皮本小书包含现代数学的大量信息——包括以作者的无与伦比的方式写成的有关拓扑学的四章. 对门外汉而言念起来不太困难, 对专家来说又不太肤浅. 我竭力推荐本书.

Jacobs, K. *Invitation to Mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1992. 为受过教育的门外汉写的有关现代数学许多重要课题的第一流的介绍性图书. 比前面那本书稍为专门一点, 但仍具有很好的可读性. 本书包含有关拓扑学的精彩一章.

Hansen, V. *Geometry in Nature*. Wellesley, MA: A. K. Peters, 1993. 有关几何学及其用于研究物理世界的一本特别好的引论性图书. 该书包括了关于曲面的拓扑学以及突变的拓

扑学的出色的一章.

Alexandroff, P. *Elementary Concepts of Topology*. New York: Dover, 1961. 一本以大学生可以接受的水平写的难度不大、直观的只有 60 页的拓扑学引论.

Arrow, K. and F. Hahn. *General Competitive Analysis*. Amsterdam: North-Holland, 1971. 一般平衡分析的经典的数学论述.

Debreu, G. "Four Aspects of the Mathematical Theory of Economic Equilibria." *Proc. Int. Congress of Mathematicians*. Vancouver, BC: Canadian Mathematical Congress, 1974, 65 – 77. 有关一般平衡理论的、数学的、很好的、但相当专门的综述.

Smart, D. R. *Fixed Point Theorems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1974. 有关不动点的大多数已知数学结果的综述. 相当专门. 只对专业人员有用.

Brouwer, L. E. J. "Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten." *Math. Annalen*, 71 (1910), 97 – 115. 布劳威尔关于流形映射的原文, 在该文中他提出了他的不动点定理.

Scarf, H. "Fixed-Point Theorems and Economic Analysis." *American Scientist*, 71 (May-June 1973), 289 – 296. 关于在经济分析中怎样出现不动点的介绍性论述, 同时还有关于单形逼近方法的很好的讨论.

Scarf, H. with the collaboration of T. Hansen. *The Computation of Economic Equilibria*. New Haven, CT: Yale University Press, 1973. 关于怎样用单形逼近方法求经济中的不动点的详细的数学论述. [219]

Keener, J. "The Perron-Frobenius Theorem and the Ranking of Football Teams." *SIAM Review*, 35 (March 1993), 80 – 93. 在不公平成对竞赛中对球队排名的四种不同方法的数学论述.

第3章 奇点理论

Stewart, I. and T. Poston. *Catastrophe Theory*. London: Pitman, 1978. 关于奇点和突变理论的极好的论述，同时还有来自物理、工程和生物学的许多例子. 有一点但并不过分的专门，但不仅仅是为数学家专用的书. 有直到该书出版时为止已出版的有关本书内容的极好的文献目录.

Lu, Y. C. *Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory*. New York: Springer, 1976. 有关本章中提出的概念、思想的很好的数学介绍. 相当数学化.

Deakin, M. "An Elementary Approach to Catastrophe Theory." *Bull. Math. Biol.*, 40 (1978), 429–450. 只用不超过一年级微积分和幂级数展开的思想来讲述奇点理论和突变论的基本概念、思想.

Woodcock, T. and M. Davis. *Catastrophe Theory*. New York: Dutton, 1978. 专对门外汉讲述突变论. 完全是非数学的论述. 有关突变论应用的极好的讨论以及"突变论争论"的详细论述.

Woodcock, A. E. R., and T. Poston, *A Geometrical Study of the Elementary Catastrophes*. Springer Lecture Notes in Mathematics, Vol. 373. Berlin: Springer, 1974. 关于各种高维分歧曲面的截面的优美的计算机图画.

Saunders, P. *An Introduction to Catastrophe Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1980. 为大学生写的难度不大、紧凑的突变论引论. 用最少的数学详尽阐述了大量的材料.

Thom, R. *Structural Stability and Morphogenesis*. Reading, MA: W. A. Benjamin Co., 1975. 这就是那本开始提出了可以



讨论的所有问题的书．把数学的论证、生物学的思考和哲学的洞察出色地结合在一起．不要错过这本书． [220]

Stewart, I. "Applications of Catastrophe Theory to the Physical Sciences." *Physica D*. 20 (1981), 245 - 305. 概述在物理学和工程中应用突变论的综述性文章．

Zeeman, E. C. *Catastrophe Theory: Selected Papers, 1972 - 1977*. Reading, MA: Addison - Wesley, 1977. 展示突变论在起作用的论文选集．关于在社会科学中的应用的一节包括了激起对突变论的批评家的许多文章．

Baillieul, J. and C. Byrnes. "A Geometric Problem in Electric Energy Systems," in *International Symposium on the Mathematical Theory of Networks*. Vol. 4. Hollywood, CA: Western Periodicals, 1981. 在电能生产领域中突变论的有趣的应用．

Thom, R. "Topological Models in Biology." *Topology*, 8 (1969), 313 - 335. 有关启发托姆发展突变论的数学理论的生物形式的托姆思想的详细的论述．

Sussman, H. J. "Catastrophe Theory: A Preliminary Critical Study." *Proc. Biennial Mtg. Phil. Sci. Assn.*, 1976. 该文点燃了反对突变论的公开的围攻．

Arnold, V. I. *Singularity Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1981. 细述奇点理论背后的数学的相当专门的论文集．

Gilmore, R. *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers*. New York: Wiley, 1981. 有关突变论的理论和应用的很好的工程讨论．在与工程师数学知识相协调的非正式的水平上有一点但不过分的数学．

Paulos, John Allen. *Mathematics and Humor*. Chicago: University of Chicago Press, 1980. 利用数学工具——逻辑、哥德尔定理和突变论向普通读者介绍对幽默的分析．很有娱乐



性．阐明了维特根斯坦[①]的著名的评论：严肃的哲学工作可能被写成除了笑话外什么也没有．

第4章 计算的理论

Rucker, R. *Mind Tools*. Boston: Houghton-Mifflin, 1987. 现代数学思想的一个漂亮的导引性的论述，包括对图灵机、计算和它们同智慧的关系的极好的讨论．

[221]

Davis, M. *Computability and Unsolvability*. New York: McGraw-Hill, 1958 (reprint edition: New York: Dover, 1982). 可计算性概念的专门性引论．也包括戴维斯（Davis）关于希尔伯特第10问题的不可解性的著名论文的重印本．

Epstein, R. and W. Carnielli. *Computability: Computable Functions, Logic and the Foundations of Mathematics*. Pacific Grove, CA: Wadsworth & Brooks/Cole, 1989. 我所知道的最可读和最直观的可计算性理论引论之一．因其从希尔伯特、哥德尔和其他人的关于数学的哲学及其同可计算性理论的关系的工作的诸多引述而值得注意．

R. Herken, ed. *The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey*. Oxford: Oxford University Press, 1988. 评论图灵机及其在其他领域的许多介入和可能的后果的当代知识的激励人的文集．

Jones, J. "Recursive Undecidability: An Exposition." *Amer. Math. Monthly*, 81 (1974), 724-738. 关于不可判定性和计算的一篇启蒙性的综述文章，包含有图灵机对策的一个得胜策略的不可计算性的一种证明．

① 译注：Ludwig Wittgenstein, 1889. 4. 26 ~ 1951. 4. 29, 奥地利出生的英国哲学家，20世纪英语世界中哲学界的主要人物．

Hofstadter, D. *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. New York: Basic Books, 1979.（中译本：[美] 侯世达著，哥德尔、艾舍尔、巴赫——集异璧之大成，郭维德等译，商务印书馆，1996.）对形式系统的概念、哥德尔定理和人工智能的一篇漂亮的引论. 包含有在正文中使用过的★-✠-✹系统的论述.

Nagel, E. and J. R. Newman. *Gödel's Proof*. New York: New York University Press, 1958. 第一篇特意为普通读者写的讲哥德尔定理的报告——而且仍然是最好的之一.

Chaitin, G. *Information, Randomness, and Incompleteness*. 2d ed. Singapore: World Scientific, 1990. 讲述柴丁独立地发现算法的复杂性及其同随机性的联系的完整的故事的一本重印的集子.

Garey, M. and D. Johnson. *Computers and Intractability*. San Francisco: Freeman, 1979. 关于计算上的易处理性，NP 完全性，以及诸如此类的其他事情的最可靠的总括的参考书.

Blum, L., M. Shub, and S. Smale. "On a Theory of Computation and Complexity over the Real Numbers: *NP*-Completeness, Recursive Functions and Universal Machines." *Bull. Amer. Math. Soc.*, 21 (1989), 1–46. 布鲁姆—舒勃—斯梅尔机器计算模型的权威性的数学论述.

[222]

Chaitin, G. "The Limits of Mathematics." IBM Research Report RC–19646, July 1994. 算法的信息理论的一篇亲身实践的、重视计算的阐述性文章. 包含有用以实际地计算出现于该理论中的许多个复杂性限界的 LISP 程序.（该文献可以通过向：chao-dyn@xyz. lanl. gov 发送电子邮件伴以主题：get 9407003，从 Internet 下载得到.）

A. R. Anderson, ed. *Minds and Machines*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1964. 关于人工智能的哲学方面的一些论文

的重印本．包括图灵关于人工智能的著名的 1950 年论文，以及卢卡斯的（不）名誉的基于哥德尔工作的 1961 年反击．

Bennett, C. "On Random and Hard-to-Describe Numbers." IBM Research Report RC-7483 (# 32272), IBM Research Laboratories, Yorktown Heights, NY, May 23, 1979. 柴丁数 Ω 的性质的非形式的讨论，连同它的对数学中的猜想的可判定性的暗示．

Shub, M. "Mysteries of Mathematics and Computation." *Math. Intelligencer*, 16 (1994), 10 - 15. 计算的理论和实践之间的关系的导引性的报告．包括有使用 BBS 计算模型（直到 1993 年）所获得的结果的一个极好的概述．

第 5 章 最优化理论

E. Lawler, et al, eds. *The Traveling Salesman Problem*. New York: Wiley, 1985. 解旅行推销员问题的计算的最新水平的很好的概览．

Darst, R. *Introduction to Linear Programming*. New York: Dekker, 1991. 对线性规划及其很多项扩展——网络流、二次规划、整数规划等等的非常好的引论．包含大量的工作练习和例子．

Dantzig, G. *Linear Programming and Extentions*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1963. 线性规划的创始人的空前的经典报告．几乎是百科全书式的，完全包括了当时关于该论题的已知的所有事情．

Vadja, S. *Theory of Games and Linear Programming*. London: Methuen, 1956. LP 及其同二人零和对策的联系的简明而易于理解的报告．

[223]

Ford, L. R. and D. R. Fulkerson. *Flows in Networks*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1962. 最小截一最大流定理及其许多应用的成熟的报告.

Ahuja, R., T. Magnauth, and J. Orlin. "Some Recent Advances in Networks Flows." *SIAM Review*, 33 (1991), 179 - 219. 网络流问题的求解的发展的最新报告. 强调流问题的算法方面.

Borgwardt, K. H. *The Simplex Method*. Berlin: Springer, 1987. 关于为什么单纯形法尽管其最坏情况分析显示它在计算上是难的，而在实践中却如此有效的详细的报告.

Arbel, A. *Exploring Interior-Point Linear Programming*. Cambridge, MA: MIT Press, 1993. 近年来发展起了一些不同于单纯形法的方法，使用投影从可行域的内点脱出而求在边界上的最优解. 该书对这些方法给出了一个极好的引论. 这些方法常常较单纯形法显著地快. 书中包含一个有这些内点方法的程序的计算机软盘.

Dolan, A. and J. Aldous. *Networks and Algorithms*. Chichester, England: Wiley, 1993. 关于以图、网络和设计的公开大学课程为基础的网络流问题的极好的入门教材. 极力推荐.

Bellman, R. E. and S. E. Dreyfus. *Applied Dynamic Programming*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1962. 动态规划的经典工作. 强调在控制理论和在运筹学其他部分中的应用.

Larson, R. and J. Casti. *Principles of Dynamic Programming - Parts I and II*. New York: Dekker, 1978, 1982. 动态规划的引论. 其论述几乎为数以百计的例子所独占，强调该方法的数值方面.

Saaty, T. *Nonlinear Mathematics*. New York: McGraw - Hill,

1964. 所有类型的非线性问题以及它们的解决方法的著名的报告. 关于非线性规划的一章写得特别好, 因为其中充满了大约在 1960 年代中期的方法和例子.

Künzi, H., H. Tzschach, and C. Zehnder. *Numerical Methods of Mathematical Optimization*. New York: Academic Press, 1968. 解非线性最优化问题的最为流行的许多个计算方法的概览. 包括这些方法的大多数的 Fortran 和 Algol 程序.

[224]

Bellman, R. E. "Mathematical Aspects of Scheduling Theory." *SIAM J. Appl. Math.*, 4 (1956), 168 – 205. 对于用动态规划解装配线排序问题、网络流问题、投资控制问题和大量的其他问题的极好的导引. 包含有动态规划方法同 LP 方法的比较性讨论, 指出每一方法的相对优越之处.

[225]

人名索引

名词索引

C

D

E

I

K

L

M

N

O

P

R

S

T

W

Z

作者自述



约翰·L·卡斯蒂

我在 1970 年得博士学位(Ph. D.),在南加州大学，学科数学，导师 R·贝尔曼（Richard Bellman）. 在成为设在奥地利维也纳的国际应用系统分析研究所（International Institute for Applied Systems Analysis）（IIASA）的一名首席研究人员之前，我曾在加州圣大芒尼加在兰德公司工作过，也曾奉职于亚利桑那大学、纽约大学和普林斯顿等的不同院系. 1986 年我离开 IIASA,开始在维也纳技术大学（Technical University of Vienna）

任职，做运筹学和系统论的教授．我同时也是在美国新墨西哥圣塔菲的圣塔菲学院（Santa Fe Institute）的外籍教授的成员，在那里我正在生物学隐语应用于在经济、金融和道路交通网络中的问题的数学建模方面发挥作用．

近几年中，我写了大量的文章和7部关于数学建模的学术专著和教科书．此外，我是《应用数学和计算》（*Applied Mathematics & Computation*）（Elsevier，纽约）和《复杂性》（*Complexity*）（Wiley，纽约）二杂志的编辑．1989年我的教科书/参考书著作《替代现实：自然和人的数学模型》（*Alternate Realities: Mathematical Models of Nature and Man*）（Wiley，1989），在数学和自然科学方面出版的所有的学问精深的书当中竞争胜出，被美国出版者协会（Association of American Publishers）授奖．1992年，我又出版了两卷本的数学建模教科书《实在规则》（*Reality Rules*）（Wiley，纽约）．

除这些学术性的著作外，我还写了几部关于科学的通俗读物：《模范蒙损：在科学的镜子中人的影像》（*Paradigms Lost: Images of Man in the Mirror of Science*）（Morrow，1989），讲述现代科学中几个最为难解的争论；《必然性之研究：科学家所能知道的关于未来的事情》（*Searching for Certainty: What Scientists Can Know About the Future*）（Morrow，1991）讨论日常事件的科学预测和解释，像气象、股市价格变动和爆发战争等，以及《复杂态》（*Complexification*）（Harper Collins，1994），复杂系统及其产生反直觉的、令人惊异的行为的方式的研究．我新近的通俗科学册子是《20世纪数学的五大指导理论——以及它们为什么至关重要》（*Five Golden Rules: Great Theories of 20th - Century Mathematics — and Why They Matter*[①]），由约翰·威利公司（纽约）在1995年9月出版．我的下一部通俗科学

① 译注：中译本即本书．

著作是《愿成而未成的世界》(*Would-Be World*),讲计算机仿真和有希望改变我们从事科学工作方式的那类方法. 该书将于1996年10月由约翰·威利公司(纽约)出版. 现在,我正在写作一本"科学的想象",涉及L·维特根斯坦、A·图灵、J·B·S·哈尔丹(J. B. S. Haldane)、C·P·斯诺(C. P. Snow)和E·薛定谔(Erwin Schroedinger)以及有思想力的机器的问题.